GUÍA DE EJERCICIOS

Curso de Nivelación 2015
Matemática

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Universidad Nacional del Sur

2015

Selección y resolución de ejercicios

Lic. Natalia Abad
Dr. Diego Castaño
Lic. Jorge Martinez
Mg. Silvina Pistonesi
Prof. Ana Julia Rafti Schroeder
Prof. Verónica San Roman
Dra. Marta Zander

Coordinación general

Lic. Rodolfo E. Salthú
Secretario Académico

Prólogo

El ingreso a la Universidad enfrenta al estudiante a cambios sustanciales en su vida; es por ello que el Curso de Nivelación de Matemática tiene como objetivo ayudarlo en ese tránsito, no sólo en los contenidos académicos sino en su adaptación a la vida universitaria.

El material que presentamos ha sido elaborado por docentes del Departamento de Matemática para dar a todos los estudiantes la posibilidad de realizar una puesta al día de conceptos y habilidades en matemática que se suponen adquiridos en el nivel medio, así como también equiparar la formación en esta disciplina de los alumnos procedentes de las diferentes escuelas.

En cada una de las unidades incluimos:

- ejercicios para resolver, ordenados en nivel de dificultad creciente, cuyas respuestas aparecen al final de la guía.
- conceptos y resultados teóricos.

Además hemos incluído ejercicios de cuadernillos anteriores y una breve lista de ejercicios adicionales para cada una de las unidades, que serán útiles para la comprensión final de los temas.

Debemos destacar que cada estudiante es responsable de sus logros. El esfuerzo y la dedicación deben ser los compañeros ineludibles en la Universidad y el éxito depende fundamentalmente de ellos. Los docentes nos comprometemos a brindar el apoyo necesario para iniciar este camino, pero cada uno debe participar seria, crítica y activamente en esta propuesta, porque sólo así tendrá sentido lo que se haga desde la Universidad.

Sugerimos la siguiente forma de trabajo para desarrollar esta guía:

- repasar los conceptos teóricos básicos necesarios para abordar cada unidad,
- hacer todos los ejercicios propuestos, para adquirir habilidades matemáticas y lograr una mejor comprensión de todos los temas.

Departamento de Matemática
Universidad Nacional del Sur

Agradecimientos

A los docentes Ana Cocilova, Rafael Cornejo Endara, Rosana Entizne, Diana Salgado, Julio Sewald y Romina Wagner por sus acertados comentarios y observaciones.

Notación

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$: conjunto de los números racionales
$\mathbb{I}$: conjunto de los números irracionales
$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales
$>$: mayor que
$\geq$: mayor o igual que
$<$: menor que
$\leq$: menor o igual que
$\in$: pertenece
$\notin$: no pertenece
$\cup$: unión
$\cap$: intersección
: : tal que
$\emptyset$: conjunto vacío
$\forall$: para todo
$\exists$: existe
$\nexists$: no existe
$f : A \to B$: función f definida de A en B
$f(a)$: f en a , f evaluada en a
$D(f)$: dominio de f
$Im(f)$: imagen de f
$\Rightarrow$: implica
$\Leftrightarrow$: equivalente
$\approx$: aproximado
s. e. l. : sistema de ecuaciones lineales
u. m.: unidad de medida

Índice

1. Números Reales **7**

2. Funciones reales de una variable real **14**

3. Función lineal **20**

4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas **24**

5. Función cuadrática **26**

6. Polinomios y función polinómica **31**

7. Trigonometría **36**

8. Ejercicios adicionales **40**

9. Respuestas **47**

9.1. Números Reales 47
9.2. Funciones reales de una variable real 49
9.3. Función lineal 52
9.4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas 54
9.5. Función cuadrática 54
9.6. Polinomios y función polinómica 56
9.7. Trigonometría 58
9.8. Ejercicios adicionales 60

1. Números Reales

$$\mathbb{R}: \text{Reales} \begin{cases} \mathbb{Q}: \text{Racionales} \begin{cases} \mathbb{Z}: \text{Enteros} \begin{cases} \mathbb{N}: \text{Naturales } 1,2,3,\ldots \\ 0: \text{ Cero} \\ \mathbb{Z}^-: \text{Enteros negativos } -1,-2,-3,\ldots \end{cases} \\ \text{Fraccionarios} \begin{cases} \text{Exactos}: 1{,}5 = \frac{3}{2} \\ \text{Periódicos}: 0{,}666\ldots = 0.\widehat{6} = \frac{2}{3} \end{cases} \end{cases} \\ \mathbb{I}: \text{Irracionales } : \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e, \ldots \end{cases}$$

1. Indicar a qué conjunto/s pertenece cada uno de los siguientes números.

   a) $\pi/2$, b) $\sqrt{36}$, c) 2,25111,

   d) 0, e) $\sqrt{7}$, f) -2,$0\widehat{1}$,

   g) $-\frac{9}{81}$, h) $\sqrt[3]{-8}$, i) $\left(-\frac{2}{6}\right)^{-1}$.

2. Para cada afirmación, indicar si es verdadera (V) o falsa (F) y explicar.

   a) Todo número real es racional. b) Todo número natural es entero.

   c) Todo número entero es racional. d) Todo número real es irracional.

3. Escribir, en cada caso, todos los números enteros que

   a) son mayores a -101 y menores a -97,

   b) son mayores o iguales que -17 y menores que -12,

   c) son menores o iguales que 2 y mayores o iguales que $-\sqrt{4}$.

Operaciones en $\mathbb{R}$

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ cualesquiera

Propiedad	**Suma**	**Producto**
Asociativa	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
Conmutativa	$a+b = b+a$	$a \cdot b = b \cdot a$
Elemento Neutro	$\exists 0 \in \mathbb{R} : a+0 = 0+a = a$	$\exists 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Simétrico (Suma) – Inverso (Producto)	$\exists b \in \mathbb{R} : a+b = b+a = 0$ $(b = -a)$	Si $a \neq 0, \exists b \in \mathbb{R} : a \cdot b = b \cdot a = 1$ $\left(b = a^{-1} = \frac{1}{a}\right)$
Distributiva del producto con respecto a la suma	$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$	

4. Calcular el valor de las siguientes expresiones sin utilizar calculadora.

   a) $-6 \cdot 3 - (-5) \cdot [-9 : (-3)]$,

   b) $\left(-\frac{16}{2} + 4\right) : 4 - \left(\frac{2-5}{-4} \cdot 2 + \frac{3}{2}\right)$,

   c) $\left(3^2\right)^2 - \left[(-2)^3\right]^2 + \left(-5^2\right)$,

   d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^{-1} : \sqrt{8 : \left(\frac{1}{2}\right)^{-1}} + \frac{3}{2} : (-2) - \left[\left(\frac{1}{2} - 1\right)^{-1}\right]^0$,

   e) $2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-4}$.

5. Los resultados indicados a continuación no son verdaderos. Marcar los errores de procedimiento cometidos y hallar el resultado correcto.

   a) $2 - 3 \cdot (4 \cdot 2 + 8) = -1 \cdot 16 = -16$,

   b) $\frac{-2^2 + 4^{-1}}{-2^3 - 2^{-1}} = \frac{4 + \frac{1}{4}}{-8 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{17}{4}}{-\frac{17}{2}} = -\frac{1}{2}$.

6. Resolver utilizando la definición y las propiedades de potenciación.

   a) $2^{-1} \cdot 2^{-3} \cdot 2^{-4}$,

   b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$,

   c) $\left(7^{-1} : 7^{-3}\right) \cdot 7^{-2}$,

   d) $\left(-\frac{1}{5}\right)^4 : \left(-\frac{1}{5}\right)^2$,

   e) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}}$,

   f) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{5}} \cdot \sqrt[6]{5^5}\right)^3$,

   g) $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \sqrt[4]{3^{-1}}\right)^{\frac{4}{7}}$,

   h) $\left(\sqrt[5]{4^3} : 4^{\frac{1}{5}} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{4}{5}}\right)^{-1}$.

7. a) Mostrar que la igualdad $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ no es válida en general.

   b) Encontrar tres números a, b y c que satisfagan la igualdad anterior. ¿Es posible encontrar otros?

8. Verificar la siguiente igualdad sin utilizar calculadora.

$$\left(\sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}\right)^{96} + \left\{\left[\left(\sqrt[6]{\sqrt[3]{2}}\right)^2\right]^3\right\}^9 = 24.$$

9. Efectuar las siguientes operaciones e indicar a qué conjuntos numéricos pertenece el resultado.

   a) $\dfrac{3+\sqrt{2}}{4} - \dfrac{3+3\sqrt{2}}{4}$,

   b) $-\sqrt{3} - 5 - 2 \cdot \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

   c) $\left(-\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$,

   d) $\left(\sqrt{5} - \sqrt{6}\right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{6}\right) \cdot \dfrac{1}{2}$,

   e) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)^2$.

10. Verificar la validez de las siguientes igualdades. En algunos casos deberá racionalizar numerador y/o denominador.

    a) $\dfrac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}} = \dfrac{\sqrt{6} - 1}{3}$,

    b) $\dfrac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}} = 1 + \dfrac{\sqrt{6}}{6}$,

    c) $\dfrac{1}{2 \cdot (\sqrt{3} - \sqrt{5})} = -\dfrac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$,

    d) $\dfrac{3}{\sqrt{5} - 2} = 3\sqrt{5} + 6$,

    e) $\dfrac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2} = \sqrt{2}$,

    f) $\dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \dfrac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}} = -2\sqrt{35}$.

11. Resolver los siguientes problemas.

    a) Un terrreno rectangular de 20 km. de frente por 5 km. de fondo debe cercarse con tres vueltas de alambre. ¿Cuántos metros de alambre se necesitan?

    b) En una granja había 630 animales entre gallinas, patos y pavos. El número de gallinas era de 250 y el de patos, 75 unidades menor que el de gallinas.

       i) ¿Cuántos pavos había en la granja?

       ii) Si se vendieron 100 gallinas, 32 patos y 65 pavos. ¿Cuántos animales de cada tipo quedan en la granja? ¿Cuántos en total?

    c) Antonio está llenando su piscina, que mide 8 m. de largo, 5 m. de ancho y 2,20 m. de profundidad. Si en este momento hay en la piscina 46 400 litros. ¿Cuántos litros faltan para que esté llena completamente? (1 litro = 0,001 m^3).

    d) Se deben colocar perlitas de 8 mm. de diámetro en el borde de una torta circular que tiene 12 cm. de radio. ¿Cuántas perlitas se deben comprar?

12. Factorizar, si es posible, las siguientes expresiones.

a) $169a^5b^3c + 13ab^3c^5$,

b) $5a^3b^2 - 10a^5y^2 + 5a^2b^3y + 15a^6b^5$,

c) $\frac{x^3y^2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)^3 x^2 + \left(\frac{xy}{\sqrt{2}}\right)^4$,

d) $\pi + \pi x^2 + \pi^2$,

e) $\frac{5}{2}m^5n^3 - \frac{1}{2}m^3n + \frac{1}{8}m^3np^3 + \frac{5}{2}m^4n$,

f) $\frac{10}{21}xyz + \frac{1}{3}x^2y^5z^4 + \frac{2}{9}xy^6z^5 - \frac{2}{3}xy^2z^8$.

13. Factorizar, si es posible, los siguientes trinomios.

a) $x^2 + 10x + 25$,

b) $m^2 + 2mn + n^2$,

c) $\frac{q^2}{4} - pq + p^2$,

d) $6y + x + 4$,

e) $4x^6 + \frac{4}{3}x^3y + \frac{y^2}{9}$,

f) $\frac{1}{x^2} + y^8 - 2\frac{y^4}{x}$.

14. Factorizar, si es posible, las siguientes diferencias de cuadrados.

a) $x^2 - 9$,

b) $y^2 - 25m^2$,

c) $4a^2 - 9b^4$,

d) $144m^6 - 121x^8y^4$,

e) $\frac{4}{9}a^6 - \frac{b^4}{25}$,

f) $(x-y)^2 - a^2$.

15. Operar algebraicamente, factorizar y simplificar al máximo las siguientes expresiones.

a) $\dfrac{bx^2 - b - x^2 + 1}{b^2x - x + b^2 - 1}$,

b) $\dfrac{a^{-2} - 2b^{-1}}{a^{-4} - 4b^{-2}} \cdot (b - 2a)^{-1}$,

c) $\dfrac{(a+b)^{-2}}{(ab)^{-2}} : \dfrac{1}{b^{-2} - a^{-2}}$,

d) $\dfrac{m+n}{m^2 - n^2} \cdot \dfrac{m-n}{m^2 - 2nm + n^2}$.

16. Comprobar las siguientes igualdades.

a) $\dfrac{\sqrt{5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999} + 5^{999}}}{\sqrt[3]{5^{1493} + 5^{1493} + 5^{1493} + 5^{1493} + 5^{1493}}} = 25$,

b) $\dfrac{(x^{-1} + y^{-1})^{-1}}{x^{-1} - y^{-1}} : (x^{-2} - y^{-2})^{-1} = 1$,

c) $\dfrac{(ab)^{-2}}{(a+b)^{-2} \cdot (b^{-2} - a^{-2})} = \dfrac{a+b}{a-b}$.

17. a) Verificar la validez de la igualdad $\dfrac{b}{\sqrt{a} - \sqrt{a+b}} = -\sqrt{a} - \sqrt{a+b}$.

b) Usando el resultado del inciso a), operar algebraicamente y simplificar al máximo la siguiente expresión.

$$\frac{b}{(a+b)\left(\sqrt{a} - \sqrt{a+b}\right)} + \frac{1}{\sqrt{a+b}}.$$

Ecuaciones

18. Resolver las siguientes ecuaciones.

a) $2x-3=\frac{1}{2}$,

b) $5-2\left(x+3\right)=-\frac{1}{2}\left(4x+2\right)$,

c) $3x-1=6\left(\frac{x}{2}+5\right)$,

d) $\sqrt{x-2}=4$.

19. Determinar si los valores de x indicados son soluciones de la ecuación respectiva.

a) $x^3+3x^2-x-3=0$; $\quad x=2$, $\quad x=-1$.

b) $x+\sqrt[3]{x^3+1}=2x+1$; $\quad x=-1$, $\quad x=-2$.

c) $\dfrac{x+1}{x^2-1}=0$; $\quad x=-1$.

20. Determinar el conjunto solución de cada una de las siguientes ecuaciones y verificar el resultado obtenido.

a) $3\left(x-8\right)\left(x+5\right)=0$,

b) $\left(x-2\right)\left(\sqrt{2}x-2\sqrt{2}\right)=0$,

c) $\left(x^2-25\right)\left(x+1\right)x=0$,

d) $\left(x^2+1\right)\left(x-12\right)=0$,

e) $x\sqrt{x+9}+18=18$,

f) $\dfrac{4x-6}{12}-\dfrac{3x-8}{4}=\dfrac{2x-9}{6}-\dfrac{x-4}{8}$,

g) $\dfrac{x}{x-3}+\dfrac{2}{x+3}=\dfrac{x^2}{x^2-9}$,

h) $\dfrac{5x-3}{4-x^2}=\dfrac{5+x}{2+x}+\dfrac{x-3}{2-x}$,

i) $\dfrac{x^2-4x+1}{x+1}=\dfrac{x\left(x-3\right)-\left(4x-1\right)}{x+1}$,

j) $\dfrac{\left(x+1\right)\left(x+3\right)}{x+1}=\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

21. Hallar los valores de m para que se cumpla la condición que se solicita.

a) $x-2\left(1+3m\right)x+7\left(3+2m\right)=0$ no tiene solución,

b) $x=-3$ es solución de $x^2-2\left(1+3m\right)x+7\left(3+2m\right)=0$,

c) $x=5$ es solución de $\dfrac{x+1}{2}-6x+4m=2x-\dfrac{x+4}{3}+\dfrac{m}{2}$.

22. Resolver los siguientes problemas.

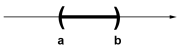
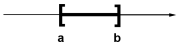
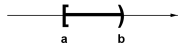
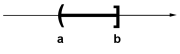
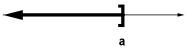
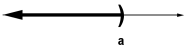
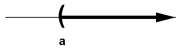
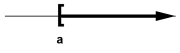
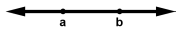
a) Después de un 20 % de descuento, un proyector se vendió en 9 600 pesos. ¿Cuál es el precio original del artículo?

b) Encontrar tres números enteros consecutivos cuya suma sea 48.

c) En 5 años Alberto tendría 3 veces la edad que tenía hace 7 años. ¿Cuántos años tiene Alberto?

Inecuaciones

Intervalos Reales
Sean a y $b \in \mathbb{R},\ a < b$.

Intervalo	**Notación de intervalo**	**Notación de conjuntos**	**Gráfica**
Abierto	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
Cerrado	$[a, b]$	$\{x : a \leq x \leq b\}$	
Semiabiertos	$[a, b)$	$\{x : a \leq x < b\}$	
	$(a, b]$	$\{x : a < x \leq b\}$	
Infinitos	$(-\infty, a]$	$\{x : x \leq a\}$	
	$(-\infty, a)$	$\{x : x < a\}$	
	(a, ∞)	$\{x : x > a\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x : x \geq a\}$	
	$(-\infty, \infty)$	$\{x : x$ es un número real$\}$	

23. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Si $x > y > 0$, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas.
    a) $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$, b) $-x > -y$, c) $x - y > 0$, d) $x^2 > y^2$, e) $3x + 1 > 3y + 1$.

24. Resolver las siguientes inecuaciones, graficar el conjunto solución y expresarlo usando la notación de intervalo.

    a) $10 - \dfrac{5x}{2} \geq 0$,

    b) $-3x + 1 \leq 5(x - 3) + 2$,

    c) $\dfrac{34 - 2x}{3} + 9 < \dfrac{3x - 8}{4} - x$,

    d) $(x - 1)^2 - 7 > (x - 2)^2$,

    e) $4 > \dfrac{2 - 3x}{7} \geq 2$,

    f) $-1 \leq \dfrac{3x - 1}{7} < 3$.

25. Resolver las siguientes inecuaciones, graficar el conjunto solución y expresarlo usando la notación de intervalo.

    a) $(x - 2)x > 0$,

    b) $(2x - 1)(x - 3) > 0$,

    c) $x(1 - 2x)(x + \frac{1}{2}) \leq 0$,

    d) $x^2 < x$,

    e) $2x^3 - x^2 > 0$,

    f) $\dfrac{x^2 - x}{(x + 1)(2 - x)} \geq 0$.

26. Analizando los resultados obtenidos en el ejercicio anterior,

    a) escribir una inecuación cuya solución sea el conjunto $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$,

    b) escribir una inecuación que involucre cocientes y cuya solución sea el conjunto $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$,

    c) escribir una inecuación cuya solución sea el conjunto $[-2, 1) \cup (1, 4]$.

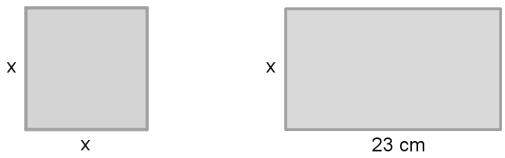
27. Resolver las siguientes inecuaciones, graficar el conjunto solución y expresarlo usando la notación de intervalo.

    a) $\dfrac{-1-3x}{1-4x} \leq 2$, b) $\dfrac{x+3}{x+1} < 2$, c) $\dfrac{x+2}{2-x} \geq 1$,

    d) $\dfrac{1}{x+2} \leq -\dfrac{x^2}{x+2}$, e) $-\dfrac{2}{x} \geq -\dfrac{5x}{x^2+6}$, f) $\dfrac{2-x}{x-3} \leq \dfrac{2}{x}$.

28. Plantear y resolver los siguientes problemas.

    a) Hallar los valores de x para los cuales el área del cuadrado es mayor que la del rectángulo.



    b) Se quiere alquilar un auto para un viaje y las opciones con que se cuenta son

        i) un costo fijo de \$ 100 al que se agrega \$ 20 por km recorrido,

        ii) un cargo inicial de \$ 400 más \$ 17 por km recorrido.

    ¿Cuántos kilómetros hay que recorrer para que la opción ii) resulte la más conveniente?

    c) El IMC es la razón entre la masa corporal y el cuadrado de la estatura de una persona. Diversos estudios realizados han concluido que el grupo más saludable corresponde a un IMC comprendido entre 20 $\frac{kg}{m^2}$ y 25 $\frac{kg}{m^2}$.

    Si una persona mide 1,5 metros, para ser considerada saludable su masa corporal en kg deberá estar comprendida entre

    i) 30 y 37,5 ii) 30 y 56,25 iii) 40 y 50 iv) 45 y 56,25 v) 45 y 55.

    Indicar la respuesta correcta.

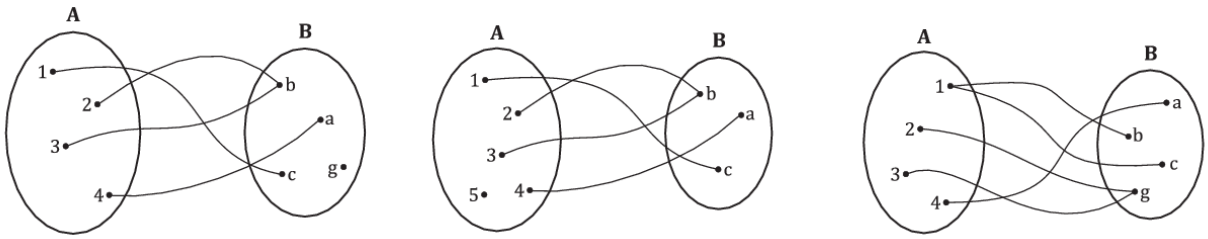
2. Funciones reales de una variable real

◇ *Definición:* Sean A y B dos conjuntos, una *función* f de A en B es una correspondencia que a cada elemento de A le asigna un y sólo un elemento de B.

Se llama *función real de una variable real* a cualquier aplicación $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, que hace corresponder a cada $x \in D$ uno y sólo un valor $f(x) \in \mathbb{R}$. La función suele representarse por $y = f(x)$ donde x se llama variable independiente e y se llama variable dependiente.

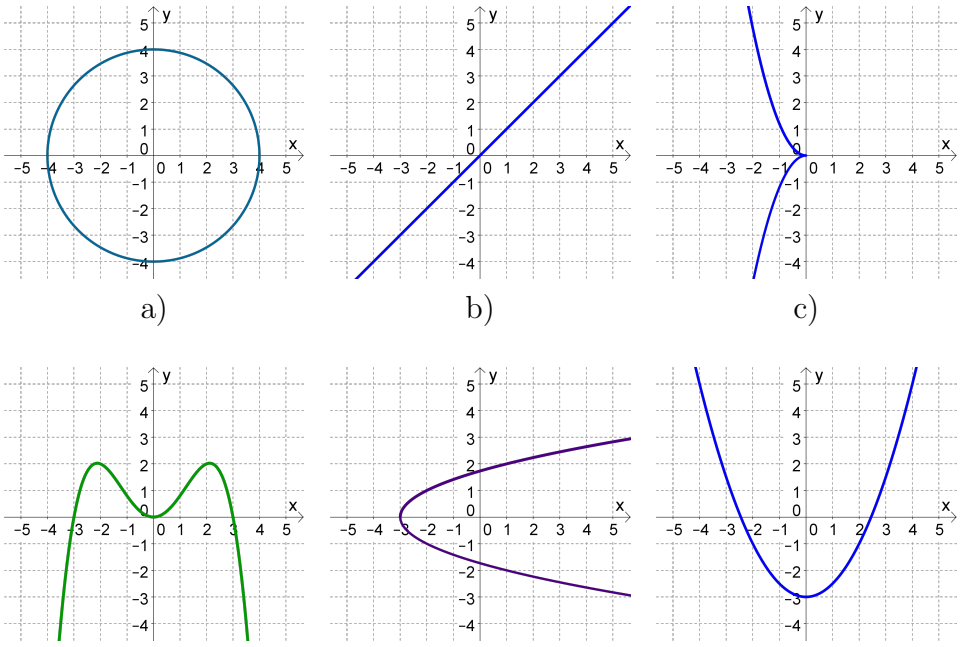
El conjunto $D \subseteq \mathbb{R}$ formado por todos los valores $x \in \mathbb{R}$ en los que la función f está definida se llama *dominio* de f y se representa por $D(f)$. La *imagen* de f, representada por $Im(f)$, es el conjunto definido por $\{f(x) \in \mathbb{R} : x \in D(f)\}$.

1. Indicar si los siguientes diagramas, definen una función $f : A \to B$ justificando la respuesta.



a) b) c)

2. Indicar cuáles de las siguientes gráficas corresponden a una función.



a) b) c)

d) e) f)

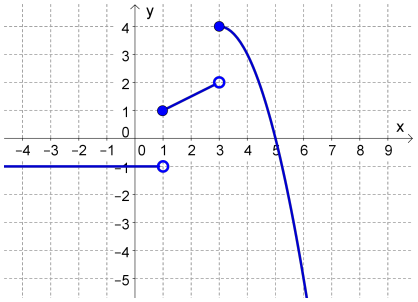
3. Para cada una de las siguientes funciones determinar, si es posible

   a) $f(x) = \sqrt{x^3 - 3}$
   i) $f(3)$, ii) $f(2)$, iii) $f(0)$, iv) $f(a+1)$.

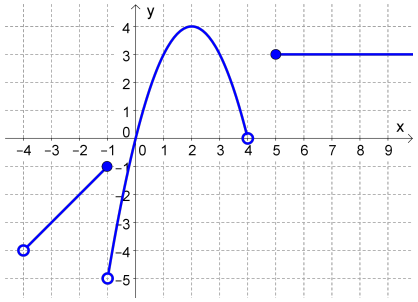
   b) $g(x) = \dfrac{4x^2 - x}{3x - 4}$
   i) $g(2)$, ii) $g(-5)$, iii) $g\left(\frac{4}{3}\right)$, iv) los x tales que $g(x) = 0$.

   c) $h(x) = \dfrac{1 - x}{x}$
   i) $h(1)$, ii) $h(2)$, iii) $h(0)$, iv) los x tales que $h(x) = 24$.

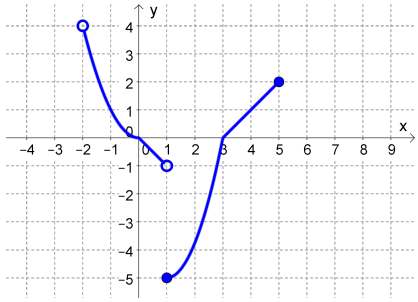
4. A partir de las gráficas de las siguientes funciones determinar



f



g



h

   a) el dominio e imagen de cada una,

   b) si es posible, $f(3)$, $f(-2)$, $g\left(\frac{9}{2}\right)$, $g(5)$, $h(3)$ y $h(-2)$,

   c) si existen, los puntos de intersección con los ejes coordenados,

   d) los intervalos del dominio donde f es positiva,

   e) los intervalos del dominio donde g es negativa.

5. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si} \quad x < -2 \\ 4 & \text{si} \quad -2 < x < 2 \\ -2x - 4 & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

   calcular, si es posible

   a) $f(-3)$, b) $f(0)$, c) $f(2)$, d) $f(-2)$, e) $f\left(\frac{7}{2}\right)$, f) los x tales que $f(x) = 4$.

6. Hallar el área de

   a) un triángulo equilátero en función del lado l. ¿Cuál es el área del triángulo si el lado mide 3 cm?

   b) un círculo en función de su diámetro d,

   c) un rectángulo en función de su altura h, sabiendo que la altura h es el triple de su base x. ¿Cuál es el área del rectángulo si la altura mide es 12 cm?

7. Hallar el dominio de las siguientes funciones y expresarlo utilizando notación de intervalo.

   a) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9$, b) $f(x) = \sqrt{2x-1}$, c) $f(x) = \sqrt[3]{2x^2-6}$,

   d) $f(x) = \dfrac{16}{3x^2 - 9x}$, e) $f(x) = \sqrt[4]{x(x+1)}$, f) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-1}}$.

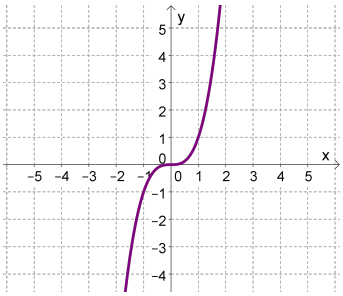
8. Determinar el dominio de las siguientes funciones.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}-3}, \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}+3}.$$

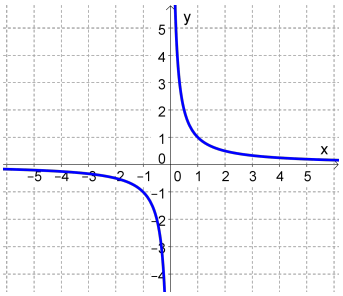
   a) ¿Son iguales los dominios?

   b) Calcular, si es posible, $f(-8)$ y $g(-8)$. ¿Qué puede concluir?

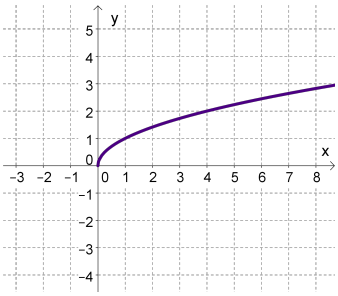
9. A partir de los gráficos de $y = x^3$, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sqrt{x}$, representar gráficamente las siguientes funciones e indicar, en cada caso, si se realizó un desplazamiento (vertical u horizontal) o una reflexión (respecto del eje x o y).



$y = x^3$



$y = \dfrac{1}{x}$



$y = \sqrt{x}$

   a) $y = x^3$, i) $y = (x-2)^3$, ii) $y = -(x-2)^3$, iii) $y = -(x-2)^3 + 1$.

   b) $y = \dfrac{1}{x}$, i) $y = \dfrac{1}{x+3}$, ii) $y = -\dfrac{1}{x+3}$, iii) $y = -\dfrac{1}{x+3} - 2$.

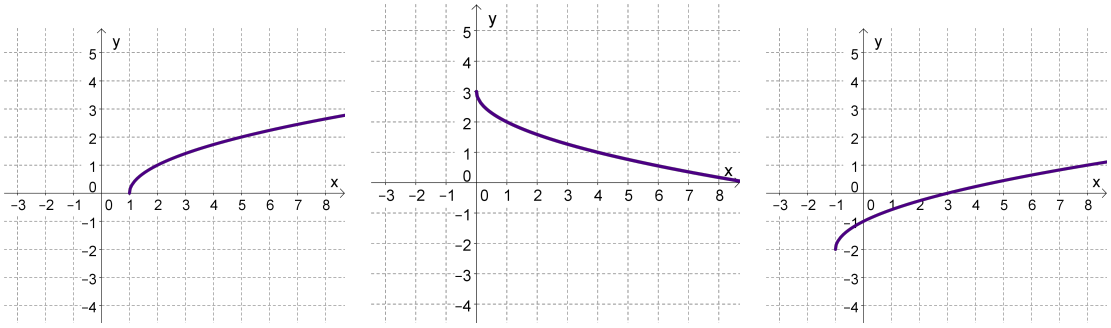
   c) $y = \sqrt{x}$, i) $y = -\sqrt{x}$, ii) $y = -\sqrt{x+5}$, iii) $y = -\sqrt{x+5} - 1$.

10. Representar gráficamente las siguientes funciones.

a) $y = (x+4)^3 + \pi$, b) $y = \dfrac{1}{x-2} + 1$, c) $y = \sqrt{-x} - 3$,

d) $y = \dfrac{1}{4-x} - 1$, e) $y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \\ x^3 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$, f) $y = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1. \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x < -1 \end{cases}$

11. Los gráficos de funciones g_1, g_2 y g_3, se pueden expresar en términos de $y = f(x) = \sqrt{x}$. Hallar la expresión de cada una de las funciones e indicar su dominio e imagen.



g_1 g_2 g_3

12. Dada $f(x) = \dfrac{1}{x-2} + 1$, determinar analíticamente los valores del dominio de f para los cuales

a) $f(x) = 0$, b) $f(x) < -1$, c) $f(x) > 3$.

Operaciones entre funciones

◇ Dadas dos funciones f y g, para todo x perteneciente a $D(f) \cap D(g)$, se definen las siguientes funciones

- la suma, denotada $f + g$, como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$,
- la diferencia, denotada $f - g$, como $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$,
- el producto, denotado $f \cdot g$, como $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
- el cociente, denotado por $\dfrac{f}{g}$, como $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, si $g(x) \neq 0$.

13. a) Dadas las funciones

i) $f(x) = \dfrac{1}{x} + x^3$, ii) $f(x) = \dfrac{1}{x} - \sqrt{x}$, iii) $f(x) = \sqrt{7-x} \cdot (x+1)^3$,

iv) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{\sqrt{x}}{x+9}$, v) $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{7-x}} - (x+1)^3$,

expresar a cada una de ellas como suma, resta, multiplicación y/o cociente de las siguientes funciones

$f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = \dfrac{1}{x}$, $f_3(x) = \sqrt{x}$,

$f_4(x) = (x+1)^3$, $f_5(x) = \dfrac{1}{x+9}$, $f_6(x) = \sqrt{7-x}$.

b) Utilizando el resultado del inciso a), hallar el dominio de cada función f.

14. Determinar el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2-16}$, b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x}}{4x-x^2}$, c) $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Composición de funciones

◇ *Definición:* Sean f y g dos funciones, si $Im(g) \cap D(f) \neq \emptyset$ la función compuesta, representada por $f \circ g$ está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

y su dominio es $D(f \circ g) = \{x \in D(g) : g(x) \in D(f)\}$.

15. A partir de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas como

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	3	1	5	3	-2	7

x	-2	-1	1	2	3	4
$g(x)$	-1	1	4	-1	0	2

realizar las tablas que representan a las funciones $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$ e indicar sus respectivos dominios.

16. Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = x^3 - 2, \qquad g(x) = \sqrt{x+1}, \qquad h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

a) Calcular

i) $(f \circ g)(x)$, ii) $(g \circ h)(x)$, iii) $(h \circ f)(x)$.

b) Calcular $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$. ¿Son iguales?

c) Hallar, si es posible,

i) $(f \circ h)(2)$, ii) $(h \circ g)(-1)$, iii) $(h \circ f)(2)$, iv) $(g \circ f)(0)$.

17. Hallar en cada caso, dos funciones f y g de modo que la composición $f \circ g$ sea la función h indicada.

a) $h(x) = \sqrt{x+1}$, b) $h(x) = 4(x^3 + 3)$,

c) $h(x) = \sqrt[5]{x^2 - 1}$, d) $h(x) = \sqrt[5]{x^2} - 1$.

3. Función lineal

◇ *Definición:* Una función lineal es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

$$f(x) = ax + b$$

donde a y b son números reales. El gráfico de $f(x) = ax + b$ es una recta no vertical, a es la pendiente y b la ordenada al origen.

1. Indicar cuáles de las siguientes funciones son funciones lineales.

   a) $f(x) = -\frac{1}{2}x$,

   b) $f(x) = 5x^2 - x$,

   c) $f(x) = 0$,

   d) $f(x) = 2x + \sqrt{3}$,

   e) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 3x - 1 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$,

   f) $f(x) = \begin{cases} -4 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ x^3 & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \end{cases}$.

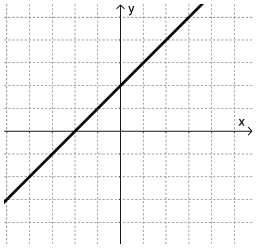
2. Determinar la pendiente y la ordenada al origen de las siguientes funciones lineales.

   a) $f(x) = 3x + 1$, b) $f(x) = -\frac{1}{2}x + 2$, c) $f(x) = -4x$, d) $f(x) = -1$.

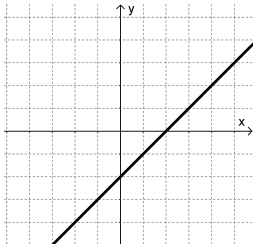
3. Graficar las rectas definidas por

   a) $y = 3$, b) $y = 2x - 3$, c) $5x + 2y - 1 = 0$, d) $-\frac{3}{2}x + 3y - 2 = 0$.

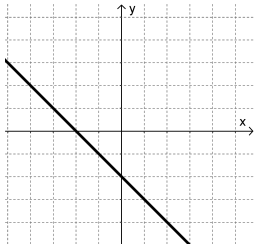
4. Sabiendo que las gráficas corresponden a funciones del tipo $f(x) = ax + b$, asociar cada condición con su gráfica correspondiente.



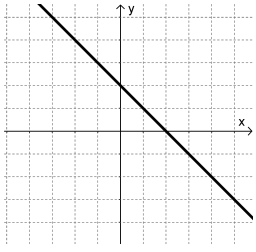
f_1



f_2



f_3



f_4

   a) $a < 0$ y $b < 0$,

   b) $a > 0$ y $b < 0$,

   c) $a < 0$ y $b > 0$,

   d) $a > 0$ y $b > 0$.

5. a) Sea $f(x) = -\sqrt{3}\,x - \sqrt{5}$, $x \in \mathbb{R}$. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función f? ,
   b) Sea $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ¿Cuál es el conjunto imagen de la función f? Si $a = 0$, ¿cuál es el conjunto imagen de f?

6. Sea la función lineal $f(x) = -\dfrac{2}{3}x + 5$.
   a) Graficar e indicar el dominio y la imagen,
   b) Hallar $f(6)$, $f(-1)$ y $f(0{,}75)$,
   c) Hallar $a \in D(f)$ tal que $f(a) = 30$,
   d) Hallar los valores de $x \in D(f)$ tales que $f(x) \geq 9$.

7. Un video club ofrece dos opciones para alquilar videos:
   Opción A: $ 20 de abono anual más $2,5 por video alquilado.
   Opción B: $30 de abono anual más $2 por video alquilado.
   a) Hallar para cada opción la expresión del precio a pagar en función del número x de videos alquilados y representar en un mismo gráfico.
   b) Si el cliente dispone de $90. ¿Cuántos videos puede alquilar con cada una de las dos opciones?

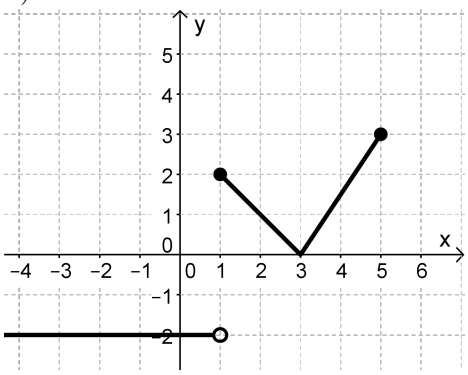
8. Una población inicial de 100 bacterias crece en forma directamente proporcional al tiempo medido en horas. Después de 2 horas la población de bacterias se duplicó.
   a) Hallar una función que indique el tamaño de la población en función del tiempo,
   b) ¿Qué cantidad de bacterias hay después de 15 horas?,
   c) ¿Cuántas horas deben transcurrir para que la población sea de 3 600 bacterias?.

9. Graficar cada una de las siguientes funciones e indicar dominio e imagen.

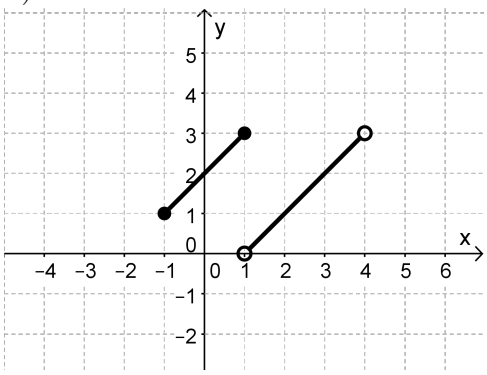
   a) $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \geq 1 \\ 3 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}$, b) $g(x) = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 4x - 1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$.

10. Hallar la expresión de las funciones lineales a trozos e indicar el dominio y la imagen en cada gráfica.

a)



b)



11. a) Indicar si los puntos $A = (2, 3)$, $B = (3, 1)$ y $C = (-2, 1)$ pertenecen a la recta de ecuación $y = \frac{2}{3}x - 1$,

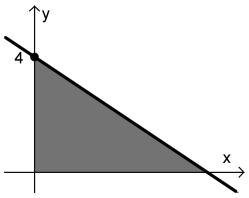
    b) Cuatro puntos A, B, C y D pertenecen a la recta $3x - 2y - 6 = 0$, sus abscisas son 4, 0, 2 y $\frac{2}{5}$, respectivamente. Determinar las ordenadas de los puntos.

12. En cada caso, hallar la ecuación de la recta que

    a) tiene pendiente 2 y ordenada al origen -3,
    b) pasa por los puntos $P = (-2, 1)$ y $Q = (-1, 7)$,
    c) pasa por el punto $P = (2, 3)$ y corta al eje de abscisas en $x = -1$,
    d) pasa por el punto $Q = (2, -2)$, y corta al eje de ordenadas en $y = 3$,
    e) corta a los ejes coordenados en $y = -2$ y en $x = 4$,
    f) pasa por los puntos $A = (1, -3)$ y $B = (5, -3)$,
    g) pasa por los puntos $A = (4, -3)$ y $B = (4, 2)$,
    h) pasa por el punto $A = (1, 3)$ y es paralela a la recta $y = \frac{1}{3}x - 2$,
    i) es paralela al eje de ordenadas y pasa por el punto $M = (-1, 4)$,
    j) es perpendicular a la recta $2x + 3y = 4$ y pasa por el origen,
    k) es paralela a la recta $x + 4y + 8 = 0$ y pasa por el punto $Q = (6, -2)$,
    l) corta al eje de abscisas en $x = \frac{1}{2}$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $A = \left(\sqrt{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $B = \left(2\sqrt{2}, 2\right)$.

13. Determinar, analíticamente, si los puntos $M = \left(3, \frac{5}{2}\right)$, $N = \left(-1, -\frac{7}{2}\right)$ y $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}\right)$ están alineados.

14. Dada la recta $y = mx + 4$, determinar el valor de m para que el área de la figura sea igual a 24.



15. Durante 48 días se realizó un experimento con gallinas. Se determinó que durante ese lapso el peso promedio es una función lineal del número de días trascurridos. Sabiendo que el peso promedio al inicio del experimento fue de 45 gramos y que 26 días después fue de 226 gramos, determinar la fórmula de dicha función lineal y calcular el peso promedio de las gallinas a los 35 días.

16. Hallar todos los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ de modo tal que las rectas $l_1 : -3x + 2y - 4 = 0$ y $l_2 : 3ax + 2y - b = 0$ sean

    a) paralelas y distintas, b) coincidentes, c) perpendiculares.

17. Determinar, en cada caso, el o los valores de k para los cuales la recta de ecuación $kx + (2k + 1)y + 3 = 0$,

    a) sea vertical,

    b) tenga pendiente igual a $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

    c) pase por el punto $P = \left(k, -\frac{k}{2}\right)$,

    d) corte en un punto a la recta $4x + 2y = 7$.

18. Calcular la distancia entre los siguientes pares de puntos.

    a) $P = (3, -8)$ y $Q = (2, -6)$, b) $P' = \left(\frac{1}{4}, 0\right)$ y $Q' = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

19. Demostrar que los puntos $A = (3, 3)$, $B = (11, 5)$ y $C = (8, 17)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su perímetro.

4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Clasificar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales (s.e.l.). Si el sistema resulta compatible indeterminado, dar la solución general.

   a) $\left\{ \begin{array}{rcl} x-3y & = & 1 \\ 2x+6y & = & 4 \end{array} \right.$, b) $\left\{ \begin{array}{rcl} 16y & = & 3x+5 \\ 19 & = & 28y+5x \end{array} \right.$, c) $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x+y-4 & = & 0 \\ 10x+2y & = & 4 \end{array} \right.$,

   d) $\left\{ \begin{array}{rcl} 2x & = & 3y-1 \\ 4x & = & 6y+2 \end{array} \right.$, e) $\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{x+y}{3}+y & = & 15 \\ \dfrac{x-y}{5}+y & = & 25 \end{array} \right.$, f) $\left\{ \begin{array}{rcl} -2x+4 & = & 3y \\ 9y & = & 12-6x \end{array} \right.$.

2. Comprobar que el s.e.l. $\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{2x-2y}{2} & = & -\dfrac{1}{2} \\ -4x+4y & = & 2 \end{array} \right.$ es compatible indeterminado.
   Hallar la solución general y determinar dos soluciones particulares.

3. Determinar $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ de modo tal que el s.e.l. $\left\{ \begin{array}{rcl} ax+\dfrac{5}{3}ay & = & -\dfrac{1}{3} \\ -3ax-\dfrac{5}{a}y & = & a \end{array} \right.$ sea

   a) incompatible, b) compatible determinado, c) compatible indeterminado.

4. a) Determinar para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ el sistema $\left\{ \begin{array}{rcl} kx-y & = & -1 \\ -2x-y & = & 3k \end{array} \right.$ representa geométricamente dos rectas que se cortan en un punto.

   b) Hallar un valor de $k \in \mathbb{R}$ para que el punto $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ sea solución del sistema del inciso anterior.

5. Determinar las coordenadas del centro de un cuadrado de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,2)$, $C = (-2,1)$ y $D = (-1,3)$.

6. ¿Cuál es la fracción tal que si se suma 1 al numerador y al denominador se obtiene $\frac{1}{2}$ y si se resta 2 al numerador y al denominador se obtiene $\frac{1}{5}$?

7. Hallar dos números tales que si se divide el primero por 3 y el segundo por 4 la suma es 15, mientras que si se multiplica el primero por 2 y el segundo por 5 la suma es 174.

8. Un padre, para estimular a su hijo a que estudie matemática, le propone el siguiente juego: por cada ejercicio bien resuelto el padre le entrega \$15 y por cada uno que esté mal, el hijo le dará al padre \$10. Al final del ejercicio 28, el hijo lleva recaudados \$195. ¿Cuántos ejercicios ha resuelto bien y cuántos mal?

9. Un comerciante compra 40 televisores y 60 DVD's pagando en total al proveedor \$34 000. Si vende los televisores con un recargo del 8 % sobre el costo y los DVD's con un recargo del 10 % sobre el costo, obtiene \$37 080. ¿Cuánto pagó el comerciante al proveedor por cada televisor y cada DVD?

10. La suma de la base y la altura de un rectángulo es igual a 25 cm. Si la base midiera 15 cm. más, sería 20 cm. mayor que el triple de la altura. Calcular el área del rectángulo.

5. Función cuadrática

◇ *Definición:* Una función cuadrática es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por la fórmula

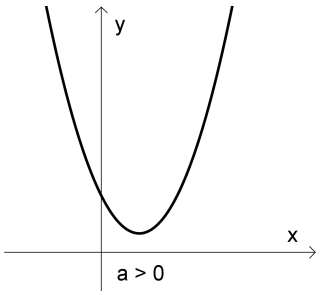
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

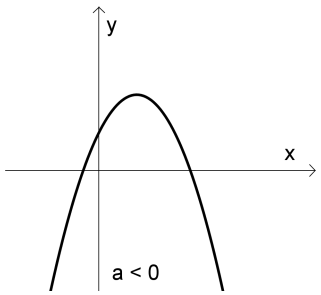
donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. Esta expresión de la función cuadrática es llamada forma polinómica.

◇ El gráfico de una función cuadrática es una parábola con eje de simetría vertical. La ecuación canónica de una parábola de vértice $V = (h, k)$ es

$$y = a(x - h)^2 + k.$$

El signo de a indica la concavidad de la parábola: hacia arriba, si $a > 0$ y hacia abajo si $a < 0$, según se observa en la figura.





1. A partir del gráfico $y = x^2$ representar gráficamente las siguientes funciones cuadráticas indicando, en cada caso, si se produjo un desplazamiento vertical, horizontal o cambio de la concavidad.

   a) $y = -2x^2$, b) $y = (x - 5)^2$, c) $y = (x + 1)^2 - 3$,

   d) $y = \frac{1}{3}(x - 1)^2 + 2$, e) $y = -(x + 2)^2 + 4$.

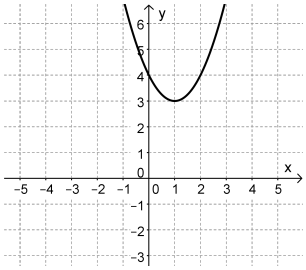
2. Determinar, sin recurrir a la gráfica, si los puntos $(0, 2)$, $(3, -6)$ y $(-2, -\frac{2}{3})$ pertenecen a la parábola de ecuación $y = x^2 + \frac{10}{3}x + 2$.

3. Determinar, en cada caso, para qué valores de k la gráfica $y = 2kx^2 + 1$ pasa por el punto

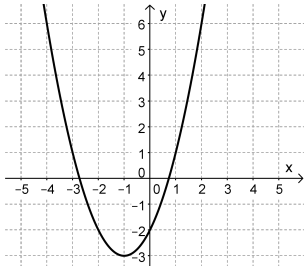
   a) $(1, 1)$,

   b) $(-\frac{1}{2}, 5)$.

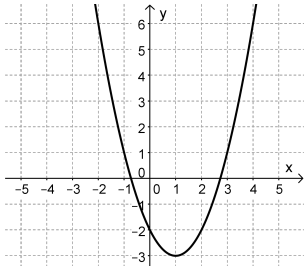
4. Relacionar cada una de las siguientes parábolas con la ecuación correspondiente.



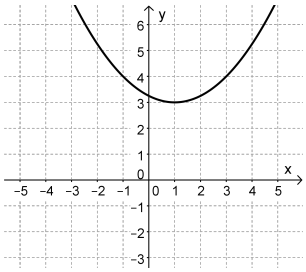
f_1



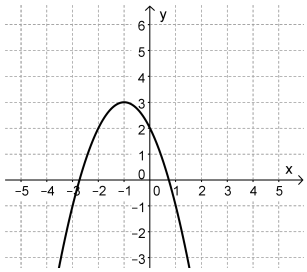
f_2



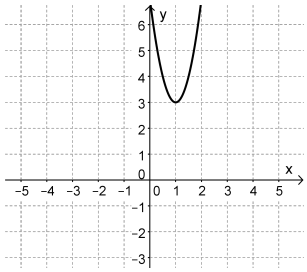
f_3



f_4



f_5



f_6

a) $y = (x-1)^2 - 3$, b) $y = \frac{1}{4}(x-1)^2 + 3$, c) $y = -(x+1)^2 + 3$,

d) $y = (x-1)^2 + 3$, e) $y = 4(x-1)^2 + 3$, f) $y = (x+1)^2 - 3$.

5. Hallar, en cada caso, la expresión de la función cuadrática tal que su gráfica

   a) pasa por el punto $(1,-1)$ y su vértice es el punto $V = (-2,3)$,

   b) intersecta al eje y en el punto $(0,3)$ y su vértice es el punto $V = (1,2)$,

   c) pasa por los puntos $(0,2)$, $(-1,5)$ y $(\frac{1}{2},1)$.

6. Dadas las funciones cuadráticas

   i) $f(x) = 5x^2$, ii) $f(x) = -5x^2 - 3$,

   iii) $f(x) = x^2 + 4x$, iv) $f(x) = x^2 - 9x + 9$,

   v) $f(x) = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{6} + 2$, vi) $f(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}x - 1\right)\left(\sqrt{3}x + 1\right)$

   a) expresarlas en forma canónica,

   b) determinar las coordenadas del vértice,

   c) indicar la imagen de cada una de las funciones,

   d) hallar la intersección con el eje y,

   e) verificar los resultados obtenidos mediante la representación gráfica de cada función.

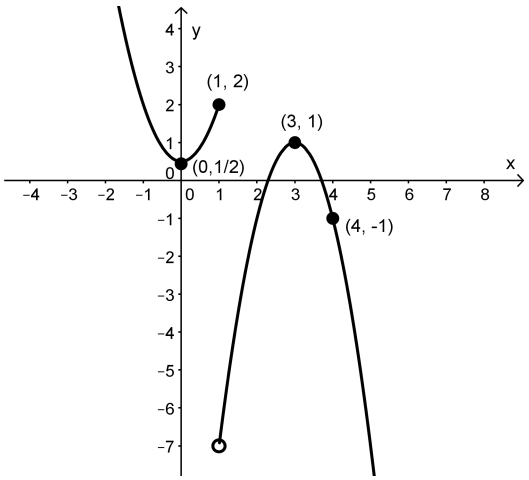
7. Sea $f(x) = \begin{cases} -2x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - 2x & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$.

   a) Graficar,

   b) Indicar su dominio e imagen,

   c) Calcular, si es posible, $f(-1)$, $f(1)$ y $f(2)$.

8. A partir del siguiente gráfico determinar la expresión de $f(x)$, utilizando como datos los puntos remarcados.

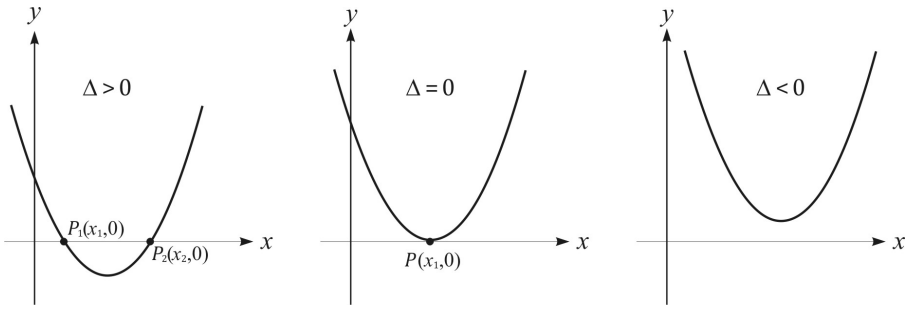


◇ Los **ceros** o **raíces** x_1 y x_2 de una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$ pueden obtenerse reemplazando los coeficientes a, b, c en las siguientes expresiones

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

La expresión $b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** y se representa con el símbolo Δ.

- Si $\Delta > 0$, la ecuación tiene dos raíces reales y distintas.
- Si $\Delta = 0$, la ecuación tiene una raíz real doble.
- Si $\Delta < 0$, la ecuación no tiene raíces reales.



9. Hallar todas las soluciones reales de las siguientes ecuaciones y verificar, cuando corresponda, el resultado obtenido.

   a) $x^2 - 9 = 0$,

   b) $5x^2 - 2x = 0$,

   c) $(x+3)^2 - 4 = 0$,

   d) $(x-2)^2 + 1 = 0$.

   e) $3x^2 = 4 - x$,

   f) $6x^2 + 21x = 12$.

10. Mediante procedimientos algebraicos, transformar cada ecuación no cuadrática a una de la forma $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$, resolver y verificar los resultados obtenidos.

    a) $x + 3 = \dfrac{-2x^2 + 7x - 3}{x - 3}$,

    b) $6 + \dfrac{11}{x} = \dfrac{2}{x^2}$,

    c) $\dfrac{1}{x^4} - \dfrac{4}{x^2} = 0$,

    d) $\dfrac{x+3}{x-2} + \dfrac{x-2}{x+3} = 0$,

    e) $x^4 - x^2 = 12$,

    f) $2x^4 + 6x^2 + 4 = 0$,

    g) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$,

    h) $(\sqrt{x} - x + 2)(x^2 - 4) = 0$,

    i) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x} + 1$,

    j) $\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x-2} = 1$.

11. Dadas las siguientes funciones cuadráticas

    i) $f(x) = x^2 - x - 20$,

    ii) $f(x) = 3x^2 - 42x + 147$,

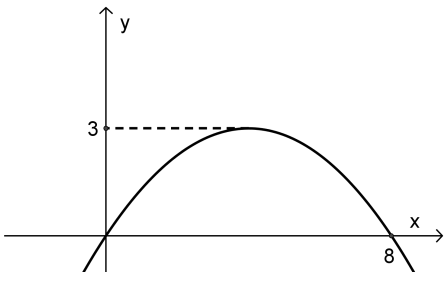
    iii) $f(x) = x^2 - 2x + 4$,

    iv) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{3}$,

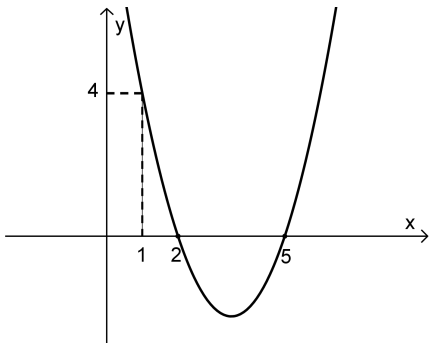
    a) indicar, sin trazar la gráfica, el número de intersecciones con el eje de abscisas,

    b) en caso de ser posible, expresar la función cuadrática en forma factorizada.

12. Hallar, en cada caso, la ecuación de la función cuadrática utilizando los datos indicados en los gráficos a) y b).



a)



b)

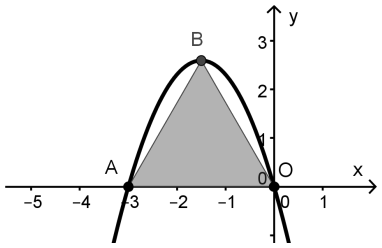
13. Hallar los posibles valores de m de modo tal que

    a) $f(x) = x^2 + mx + 4$ tenga dos ceros reales distintos,
    b) $g(x) = 2x^2 - x - m$ no tenga ceros reales,
    c) $h(x) = -x^2 - mx - 5$ tenga un único cero.

14. Hallar, en cada caso, la expresión de la función cuadrática que

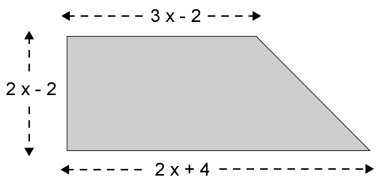
    a) tiene a $x_1 = 2$ y $x_2 = 3$ como ceros y cuyo gráfico pase por el punto $(0, 8)$,
    b) tiene a $x_1 = \sqrt{3}$ y $x_2 = -\sqrt{3}$ como ceros y $f(1) = 1$,
    c) su imagen es $(-\infty, 3]$ y corta al eje de las abscisas en los puntos $(-1, 0)$ y $(-2, 0)$,
    d) su imagen es $[-5, +\infty)$, tiene vértice sobre la recta $x = 1$ y un cero en $x = -2$.

15. Hallar la ecuación de la parábola sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABO}$ es equilátero.



16. Plantear cada uno de los siguientes problemas, resolver y verificar la validez de la respuesta dada.

    a) Hallar dos números naturales consecutivos tales que su producto sea 9506.
    b) Calcular un número entero tal que sumándole dos unidades al triple de su cuadrado se obtiene siete veces dicho número.
    c) Hallar un número entero, si es posible, tal que la diferencia entre la cuarta parte del cuadrado de su antecesor y la quinta parte del sucesor del número sea 1.
    d) Hallar la medida del lado de un cuadrado sabiendo que al disminuir en 6 m. uno de sus lados, se obtiene un rectángulo cuya área es 91 m^2.
    e) Calcular las dimensiones de un rectángulo sabiendo que su perímetro es de 20 cm. y su área 21 cm^2.
    f) Calcular la medida en cm. de las bases y la altura del siguiente trapecio sabiendo que su área es de 34 cm^2.



6. Polinomios y función polinómica

◇ *Definición:* Un polinomio con coeficientes reales es una expresión de la forma $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ donde los $a_0, \ldots, a_n$ son números reales y n es un número natural o cero. Supongamos que $a_n \neq 0$, entonces

$a_0, \ldots, a_n$ se llaman coeficientes del polinomio.

a_n se llama coeficiente principal.

a_0 se llama término independiente.

n se llama grado del polinomio, si $P(x) \neq 0$.

Si $a_n = 1$, dicho polinomio se llama mónico.

1. Indicar cuáles de las siguientes expresiones son polinomios con coeficientes reales.

   a) $\frac{1}{5}x^2$, b) $8x^2 - \sqrt{5}x^9 - 1$, c) $5x^{-1} - x + 2$,

   d) $2\pi x^3 - \frac{\pi}{3}x^2 + 1$, e) $7 - \frac{1}{x}$, f) -3,

   g) $2^x + 3^{x+1}$, h) $3\sqrt{x} - 4x + x^3$, i) $6^{-1} - 2x + 3x^3$.

2. Completar la siguiente tabla.

Polinomio	Grado	Coeficiente principal	Término independiente	Forma completa decreciente
$P(x) = 3+5x^5+6x^3$				
$P(x) = 2 - x$				
$P(x) = 0$				
$P(x) = x^4 + x^7 + 9x$				
$P(x) = x^2 + 1 + 4x^2$				
$P(x) = 3x^6$				

3. Determinar los valores reales a, b y c para que se verifique $P(x) = Q(x)$.

   a) $P(x) = x^3 + 5x^2 - 1$ y $Q(x) = (a+1)x^3 + bx^2 + c$.

   b) $P(x) = -x^5 + 2x^3 - x$ y $Q(x) = -(a+b)x^5 + 2x^3 + bx^4 - x + c$.

4. Determinar los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $Q(x) = (3a - b - 5)x^2 + (4a + b - 9)x$ sea igual al polinomio nulo.

◇ *Definición:* Dado un polinomio $P(x)$, llamamos valor numérico de $P(x)$ para $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$, al número que se obtiene reemplazando x por a y efectuando cálculos. Notamos $P(a)$.

5. Dados los siguientes polinomios, hallar el valor numérico para $x = 2$ y $x = -1$.

   a) $P(x) = -3x^2 + 4x + 3$,

   b) $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 2x$,

   c) $R(x) = -5x - 4x^2 - 2$.

6. Hallar el valor de m en los siguientes polinomios para que se cumplan las condiciones indicadas en cada caso.

   a) $P(x) = x^3 + 2x^2 - mx$ y $P(-1) = 3$,

   b) $Q(x) = x^4 - \frac{1}{3}x^2 - m$ y $Q(1) = 2$,

   c) $R(x) = -x^2 + 3\sqrt{5}x - m$ y $R(\sqrt{5}) = 0$.

7. Dados los polinomios $P(x) = x^5 - 3x^2 + 2x$, $Q(x) = -2x^4 + 5x^2$ y $R(x) = 4x^6 - 3x^4 + x^3 - 7x^2 + 3x$, efectuar las siguientes operaciones indicando el grado del polinomio resultante.

   a) $P(x) - Q(x)$, b) $P(x) + 3\,Q(x) + 5x^2$, c) $-3\,R(x) - P(x)$,

   d) $P(x) \cdot Q(x)$, e) $Q(x)^2$, f) $Q(x)^2 + x\,P(x) + R(x)$.

8. Calcular, en cada caso, el cociente $C(x)$ y el resto $R(x)$ de dividir el polinomio $P(x)$ por $Q(x)$ y expresar cada polinomio como $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x)$. Cuando sea posible, aplicar la Regla de Ruffini.

   a) $P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 8$ y $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$,

   b) $P(x) = 6x^7 - 2x^6 - x^4 + x$ y $Q(x) = x - 1$,

   c) $P(x) = -2x^4 - 3x^2$ y $Q(x) = x + 3$,

   d) $P(x) = 3x^5 - x^4 + 5x - 2$ y $Q(x) = x^2 + x - 4$.

9. Hallar el dividendo $P(x)$ de una división, sabiendo que el resto es $R(x) = 3x^2 + x$, el cociente es $C(x) = x^3 - x$ y el divisor es $Q(x) = x^4 - 3x^3 + 1$.

◇ *Definición:* Un valor $c \in \mathbb{R}$ es una raíz de un polinomio $P(x)$ si el valor numérico de $P(x)$ en c es nulo, es decir, si $P(c) = 0$.

10. Determinar cuáles de los números indicados son raíces del polinomio dado.

    a) $P(x) = 3x^2 + 5x - 2$ y los valores $x = -2$, $x = -1$ y $x = \frac{1}{3}$,

    b) $P(x) = -2x^3 + x^2 - x - 1$ y los valores $x = 2$, $x = -1$ y $x = -\frac{1}{2}$.

    ◇ *Definición:* Si al dividir un polinomio $P(x)$ por un polinomio no nulo $Q(x)$ resulta el resto igual a cero, diremos que el polinomio $P(x)$ es divisible por el polinomio $Q(x)$.

    ◇ *Teorema del Resto:* El resto de dividir un polinomio $P(x)$ por $Q(x) = x - a$ es igual al valor numérico del polinomio $P(x)$ en a, es decir, $P(a)$.

11. Determinar, sin efectuar la división, si $P(x)$ es divisible por $Q(x)$.

    a) $P(x) = x^3 - 8$ y $Q(x) = x - 2$,

    b) $P(x) = 2x^7 + 3x^6 + 18x^3 + 29x + 10$ y $Q(x) = x + 1$,

    c) $P(x) = x^2 - 5x + 6$ y $Q(x) = x - 3$,

    d) $P(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ y $Q(x) = x + \frac{1}{2}$.

12. Determinar el valor de k para que resulte $P(x)$ divisible por $Q(x)$.

    a) $P(x) = x^3 + kx^2 + k + 4$ y $Q(x) = x - 1$,

    b) $P(x) = kx^4 - 4x^3 + 16kx - 16$ y $Q(x) = x + 2$.

13. a) Calcular el valor de m para que el resto de la división de $P(x) = 4x^4 + mx^3 + 3x^2$ por $Q(x) = x - 3$ sea 324,

    b) Hallar la única raíz real de $P(x) = 2x^3 - 18x^2 + x - 9$, sabiendo que $P(x)$ es divisible por $Q(x) = 2x^2 + 1$,

    c) Encontrar los valores de a tales que al dividir $x^2 + 5x - 2$ por $x - a$ el resto es igual a -8.

14. Hallar las raíces de los polinomios dados, indicando, en cada caso, el orden de multiplicidad.

    a) $P(x) = 2x^5 + x^4 + x^2$, sabiendo que -1 es raíz,

    b) $P(x) = 8x^4 - 4x^3 - 10x^2 + 9x - 2$, sabiendo que $\frac{1}{2}$ es raíz,

    c) $P(x) = 3x^4 - 9x^3 + 9x^2 - 3x$, sabiendo que 1 una raíz.

15. Indicar, en cada caso, un polinomio de grado mínimo con coeficientes reales tal que

    a) tiene por raíces $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $x_3 = \frac{2}{3}$ y $x_4 = -1$ (x_4 raíz doble),

    b) tiene por raíces $x_1 = \frac{1}{2}$ y $x_2 = 4$, ambas de orden dos,

    c) tiene por raíces $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ y es divisible por $x^2 + 4$,

    d) su coeficiente principal es -3 y sus raíces son $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = \sqrt{2}$ y $x_4 = -\sqrt{2}$.

16. Hallar un polinomio $P(x)$ de cuarto grado que sea divisible por $Q(x) = x^2 - 1$ y que el valor numérico de $P(x)$ en $x = 2$ y $x = 3$ es cero. ¿Es único?

    ◇ *Definición:* Una función polinómica es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por una expresión polinómica

    $$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

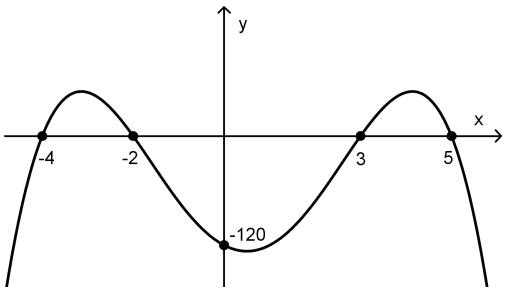
    donde los $a_0, \ldots, a_n$ son números reales.

17. Dadas las funciones polinómicas, determinar los valores de a que verifican

    a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 2$, $\quad f(a) = \frac{1}{2}$,

    b) $f(x) = ax^3 - 3x + a$, $\quad f(-2) = 27$.

18. Sea $f(x)$ una función polinómica de cuarto grado cuyo gráfico es el siguiente



    a) Determinar $f(x)$.

    b) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar.

        i) el resto de dividir $f(x)$ por $x + 2$ es -4,

        ii) $f(x)$ es divisible por $x - 3$,

        iii) El punto $(2, -3)$ pertenece al gráfico de $f(x)$,

        iv) $f(x)$ intersecta al eje de las ordenadas en el punto $(0, -120)$.

19. La cantidad de individuos de dos poblaciones A y B responde a las siguientes funciones polinómicas

$$f_A(x) = 5x + 36, \qquad f_B(x) = x^3 - 12x^2 + 44x + 8,$$

donde x es el tiempo expresado en semanas. Si ambas poblaciones coinciden en la cuarta semana, ¿tienen en algún otro momento el mismo número de individuos?

20. En un laboratorio se toma la temperatura de una cierta sustancia a partir de las 8 de la mañana. Se obtiene la siguiente función polinómica que permite calcular la temperatura, en grados, de esa sustancia en función del tiempo a partir del cual se comenzaron a realizar las mediciones: $f(x) = 0,2x^3 - 5,6x^2 + 36x$.

a) ¿Cuál fue la temperatura a las 5 horas de haber comenzado las mediciones?,

b) ¿A qué hora la temperatura era de 0°C?,

c) ¿Hubo algún momento en el cual la temperatura era bajo cero?.

21. La altura sobre el nivel del mar a la que vuela un globo aerostático está dada por la función $f(x) = x(x^2 - 10x + 25)$, donde x representa los días de viaje.

a) ¿A qué altura estará el globo a los 3 días de salir?,

b) ¿Estuvo el globo en algún momento a 250 metros sobre el nivel del mar? ¿por qué?.

22. Mateo estaba diseñando un programa de computación para construir cajas con forma de prisma recto de base rectangular. Para ello, decidió que las medidas de las aristas surgieran como funciones de una cierta variable x. Tuvo problemas con la computadora y perdió parte de la información, sólo recuperó las expresiones del volumen del prisma y dos aristas.

$$Volumen : V(x) = 80x^3 + 158x^2 + 101x + 21,$$
$$Arista\ a : A(x) = 2x + 1,$$
$$Arista\ b : B(x) = 5x + 3$$

¿Cómo se puede hacer para hallar la expresión de la tercera arista?.

7. Trigonometría

1. Expresar en grados, minutos y segundos sexagesimales la medida de un ángulo que en el sistema radial mide

   a) $\frac{2}{5}\pi$ radianes, b) 2,5 radianes, c) 2 radianes.

2. Expresar en radianes la medida de un ángulo que en el sistema sexagesimal mide

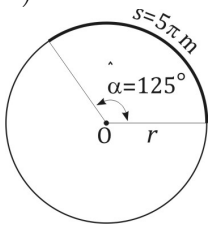
   a) $171° 53' 14"$, b) $35° 40'$, c) $70° 10' 40"$.

3. Completar la siguiente tabla.

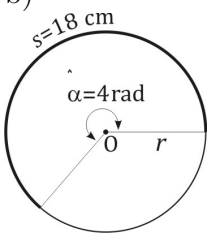
Medida sexagesimal	0°	30°			90°		135°	150°		240°	270°		360°
Medida radial	0		$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$		$\frac{2}{3}\pi$			π			$\frac{5}{3}\pi$	

4. Determinar el radio r de las circunferencias dibujadas.

a)



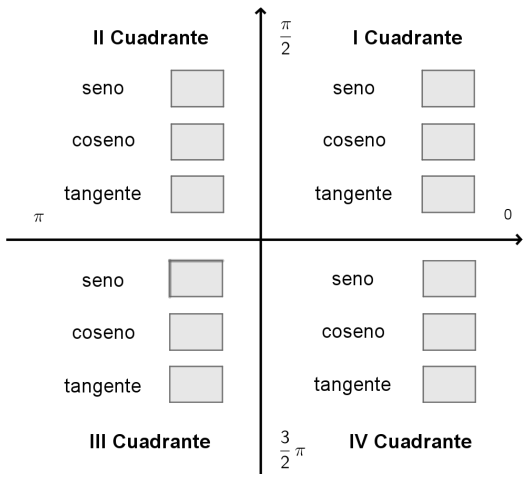
b)



5. Determinar la longitud del arco de una circunferencia de 5 cm. de radio, determinado por un ángulo con vértice en el centro de la misma, que mide 60°.

6. Dos niños juegan en un sube y baja que tiene una longitud de 5,5 metros. Al subir uno de los extremos de la barra recorrió un arco de 1,25 metros. Calcular la medida radial del ángulo que describió dicha barra.

7. Deducir los signos de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes y completar el siguiente diagrama.



8. Calcular, reduciendo al primer cuadrante, los valores de las siguientes razones trigonométricas.

   a) $\operatorname{sen}(150°)$, b) $\cos(-300°)$, c) $\operatorname{tg}\left(\frac{7}{6}\pi\right)$, d) $\operatorname{sen}\left(-\frac{5}{4}\pi\right)$,

   e) $\cos(540°)$, f) $\operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right)$, g) $\cos\left(\frac{19}{4}\pi\right)$, h) $\operatorname{sen}(450°)$.

9. Indicar, en cada caso, en qué cuadrante está el ángulo α.

   a) $\operatorname{sen}\ \alpha > 0,\ \cos\ \alpha < 0$,

   b) $\operatorname{tg}\ \alpha > 0,\ \cos\ \alpha > 0$,

   c) $\operatorname{sen}\ \alpha < 0,\ \operatorname{tg}\ \alpha < 0$.

10. a) Hallar el <u>valor exacto</u> de $\cos\ \alpha$ y $\operatorname{tg}\ \alpha$, sabiendo que $\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{1}{9}$ y α pertenece al segundo cuadrante,

    b) Hallar el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\ \beta$ y $\operatorname{tg}\ \beta$, sabiendo que $\cos\ \beta = \frac{2}{3}$ y β pertenece al primer cuadrante,

    c) Hallar el <u>valor exacto</u> de $\operatorname{sen}\ \gamma$ y $\cos\ \gamma$, sabiendo que $\operatorname{tg}\ \gamma = \sqrt{5}$ y γ pertenece al tercer cuadrante.

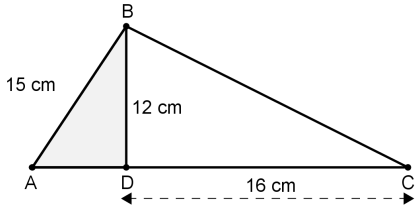
11. Hallar todos los valores de x, $0 \leq x < 2\pi$ que sean soluciones de las siguientes ecuaciones trigonométricas.

    a) $\cos\ x = -\frac{1}{2}$, b) $2\ \operatorname{sen}\ x = -\sqrt{2}$, c) $3\ \operatorname{tg}\ x + 3 = 0$,

    d) $\operatorname{sen}^2\ x - \operatorname{sen}\ x = 0$, e) $2\ \cos^2\ x - \sqrt{3}\ \cos\ x = 0$, f) $4\ \operatorname{sen}^2\ x - 1 = 0$,

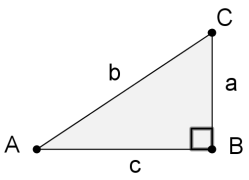
    g) $3\ \operatorname{tg}^2\ x - 1 = 0$, h) $2\ \cos^2\ x - \cos\ x - 1 = 0$, i) $2\ \operatorname{sen}^2\ x = 3\ \operatorname{sen}\ x - 1$.

12. Calcular las razones trigonométricas de los ángulos $\hat{A}$, $\hat{C}$, $A\hat{B}D$ y $C\hat{B}D$ del siguiente triángulo y completar la tabla.



θ	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$A\hat{B}D$	$C\hat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$				
$\cos\theta$				
$\operatorname{tg}\theta$				

13. Resolver el triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ indicado en la figura, para cada uno de los siguientes casos.



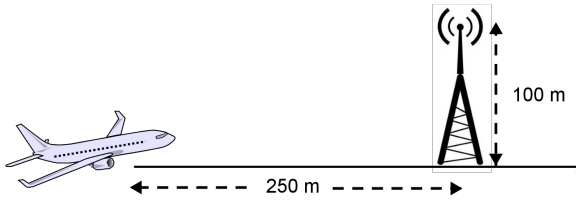
a) $\hat{A} = 42°$, $b = 7$ cm.

b) $b = 43{,}9$ cm, $c = 24{,}3$ cm.

c) $\hat{C} = 55°$, $c = 7$ cm.

14. Calcular la altura que alcanza un barrilete si la cuerda tensada mide 35 metros y forma un ángulo de 35° con el piso.

15. Determinar el ángulo de inclinación mínimo necesario para que el avión de la figura pueda despegar sobrevolando la antena.



16. Los brazos de un compás, que miden 12 cm., forman un ángulo de 50°. ¿Cuál es el radio de la circunferencia que puede trazarse con esa abertura?

17. Un poste se quiebra. La parte superior se inclina formando con la parte inferior un ángulo de 70°. El extremo superior toca el piso a una distancia de 2,10 m. del pie del poste. Determinar la longitud del poste.

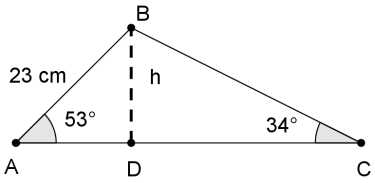
18. A partir del dibujo, hallar

    a) la altura h,

    b) la longitud de los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$,

    c) el área del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$,

    d) el perímetro.



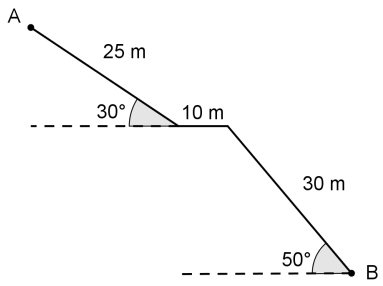
19. Desde el lugar donde se encuentra Lucía, puede observar el extremo superior de una torre con un ángulo de elevación de 32°. Si Lucía avanza 25 m. en dirección a la torre, lo observa con un ángulo de 50°. Calcular la altura de la torre si la altura de Lucía es de 1,65 m.

20. En la cima de un cerro se ha levantado una antena de telefonía celular. Desde un punto ubicado en el valle se miden los ángulos de elevación del extremo superior y la base de la antena, obeteniendo como resultado 57° y 42°, respectivamente. ¿Cuál es la altura del cerro si la antena mide 80 m. de alto?

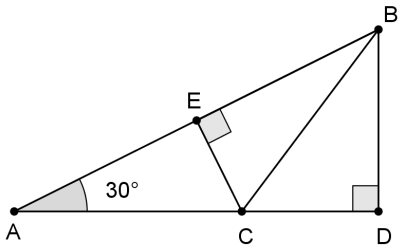
21. Para acceder a un túnel, una escalera tiene la forma y las dimensiones de la figura. Calcular:

    a) la longitud del túnel,

    b) la profundidad del túnel.



22. Sabiendo que el triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$ de la figura es isósceles, que $\overline{AC}$ mide 30 cm. y que $\hat{A} = 30°$. Calcular la medida de los lados del triángulo rectángulo $\overset{\triangle}{ADB}$.



8. Ejercicios adicionales

Números Reales

1. Si $x = -1 + \sqrt{3}$, ¿cuál de las siguientes expresiones es un número racional?
   a) x^2, b) $x^2 + x$, c) $x^2 - 1$, d) $x^2 + 2x$.

2. Indicar si los números a y b pertenecen al conjunto C.
   a) $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 > 0\}$, $a = 4$, $b = -6$,
   b) $C = \{x \in \mathbb{R} : -x^2 + 3x < 2\}$, $a = \frac{3}{2}$, $b = 2$,
   c) $C = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2} - x \leq \frac{1-x}{4} - 3\}$, $a = 9$, $b = 4$.

3. Aplicando propiedades, verificar las siguientes igualdades
   a) $(10 \cdot 2^{n+1})^3 : (2^{n+2})^3 = 5^3$, b) $2^{2-n}(2 \cdot 2^{n+1} + 2^{n+2}) = 2^5$.

4. Simplificar
   a) $\dfrac{1}{9x-3} - \dfrac{(3x+1)(1-x)}{9x^2-1}$, b) $\dfrac{\sqrt{4^{199} + 4^{199} + 4^{199} + 4^{199}} + (\sqrt{4})^{200}}{\sqrt{4^{200}}}$,
   c) $\left(x + \dfrac{x}{x-1}\right) : \left(x - \dfrac{x}{x-1}\right)$, d) $\dfrac{2pq+5}{q} \cdot \left(\dfrac{4p^2q^2 - 25}{q}\right)^{-1}$,
   e) $\dfrac{-x^2}{x^2+1} + \dfrac{x^4+1}{x^4-1}$, f) $\dfrac{1 - \dfrac{b}{a}}{a - \dfrac{ab}{a - \dfrac{b}{1 + \dfrac{b}{a}}}}$.

5. Resolver los siguientes problemas
   a) Un empleado gasta la mitad de su sueldo en comer, la mitad de lo que le queda en el alquier de una habitación, la mitad de lo que le queda en movilización y el resto en gastos varios. ¿Qué porcentaje de su sueldo gasta en movilización?,
   b) María compró un televisor que costaba \$15625, pero por pagar en efectivo el vendedor le hizo un descuento y debió pagar sólo \$12500. ¿Cuál es el descuento que se le aplicó?,
   c) Fausto salió de su casa con \$120. Gastó \$5 en llegar a la facultad y \$25 en el almuerzo. En una librería encontró una oferta de cuadernos a \$15 c/u. Si debe reservar \$5 para regresar, ¿cuántos cuadernos puede comprar?.

6. Resolver los siguientes problemas
   a) Una fábrica paga a sus viajantes \$10 por artículo vendido más una cantidad fija de \$500. Otra fábrica de la competencia paga \$15 por artículo y \$300 fijos. ¿Cuántos artículos como mínimo debe vender un viajante de la competencia para que le convenga trabajar en dicha empresa?,

b) El triple de un número entero sobre su sucesor da un número mayor que 4. ¿Qué números verifican esta condición?.

Funciones reales de una variable real

1. Sea $f(x) = 3(x - c)$. Hallar el valor de $c \in \mathbb{R}$ para el cual $f(7) = 6$.

2. Si $f(x) = x^2$, ¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

   a) $f(a + b) = f(a) + f(b)$,
   b) $f(a) = f(-a)$,
   c) $f(a - b) = f(b - a)$.

3. La velocidad máxima permitida en autopistas es de 130 km/h y la mínima de 65 km/h. Si la multa por violar los límites de velocidad es de \$150 por cada kilómetro por encima del máximo o por debajo del mínimo

   a) ¿Qué multa tendré que pagar si voy a 140 km/h? ¿Y si voy a 40 km/h?,
   b) Hallar la función que determina la multa a pagar dependiendo de la velocidad x a la que conduce una persona.

4. Para cada una de las siguientes funciones, hallar el conjunto de puntos en los cuales la función toma

   i) valores positivos, ii) valores negativos, iii) valor nulo.

   a) $f(x) = \dfrac{-2}{x^2 + 1} + 1$, b) $f(x) = \dfrac{-x^3 + 9x}{x(x + 1)}$.

5. Sean $f(x) = \dfrac{x + 2}{3x - 1}$ y $g(x) = 2x + 1$. Hallar el conjunto de puntos que verifican las condiciones

   a) $(f.g)(x) \leq 0$, b) $(f \circ g)(x) \geq 0$.

Función lineal

1. Sea la función lineal $f(x) = -\sqrt{2}x + 5$.

   a) Indicar su dominio e imagen,
   b) Calcular, si es posible, $f(\sqrt{2})$ y $f(-1)$,
   c) Hallar el valor de $a \in D(f)$ tal que $f(a) = 5$,
   d) Hallar los valores de $x \in D(f)$ tal que $f(x) \geq 7$.

2. Dadas las rectas de ecuación $r : 8x + ny - 5 = 0$ y $s : mx + 3y - 2 = 0$, sabiendo que r pasa por el punto $(1, 3)$, calcular m y n si las rectas r y s son

   a) paralelas,
   b) perpendiculares.

3. a) Los puntos $A(1, 2)$, $B(3, 6)$, $C(6, 9)$ y $D(4, 5)$ forman en el plano un paralelogramo.

i) Hallar las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ del paralelogramo,

ii) Calcular el área del paralelogramo.

b) Un almacén vende lavandina suelta y cobra \$10 por el envase y \$16 por litro de lavandina.

i) Construir la función lineal que representa el costo de la compra en función de los litros de lavandina si el comprador no posee envase,

ii) ¿Qué interpretación podemos darle a la pendiente y a la ordenada al origen en el contexto del problema?,

iii) ¿Cuánto debe pagar una señora que compró 3,5 litros de lavandina y no tenía envase propio?,

iv) ¿Cuántos litros de lavandina se podrá comprar si sólo se dispone de \$42 y tampoco se tiene envase?.

4. Dada la recta de ecuación $2x - 4y + 3 = 0$, indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta.

a) Su pendiente es $\frac{3}{4}$ y su ordenada al origen es $\frac{1}{2}$.

b) Es paralela a la recta que pasa por los puntos $(-3, 1)$ y $(3, 4)$.

c) Su gráfico intersecta al eje x en $x = \frac{1}{2}$.

d) El punto $(-1, \frac{5}{4})$ pertence al gráfico de la recta.

e) Es perpendicular a la recta $-x + \frac{3}{2} - 2y = 0$.

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. Clasificar y resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales. Si el sistema resulta compatible indeterminado expresar la solución general y dos soluciones particulares

a) $\begin{cases} x = 2y, \\ \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}y = 2, \end{cases}$ b) $\begin{cases} x - y = 2x, \\ y - x = 2y, \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x = y, \\ 4x - 2y = 2. \end{cases}$

2. Determinar, si es posible, el valor de k de modo que el sistema dado sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

$$\begin{cases} -2x + 10y = k - 3, \\ (k-1)x - 30y = -12. \end{cases}$$

3. Juan compró dos libros cuyos costos son tales que su suma es igual a $\frac{11}{2}$ de su diferencia. Por otra parte, el más caro cuesta \$20 menos que el doble del otro. ¿Cuánto le costó cada libro?

4. ¿Cuál de las siguientes ecuaciones forma un sistema compatible indeterminado con la ecuación $2x - 3y = 2$?

a) $-4x + 6y = -4$, b) $6x - 9y = 3$.

5. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando la respuesta en todos los casos.

a) Si las gráficas de estas ecuaciones lineales no son rectas paralelas, entonces el sistema tiene una única solución.

b) Si las gráficas de estas ecuaciones lineales son rectas paralelas y distintas, entonces el sistema tiene una única solución.

c) Si este sistema de ecuaciones lineales tiene dos soluciones, entonces tiene infinitas soluciones.

d) Si las dos ecuaciones lineales tienen la misma gráfica, entonces el sistema asociado tiene un número infinito de soluciones.

e) Si las gráficas de estas ecuaciones lineales no son paralelas, entonces el sistema no tiene solución.

Función cuadrática

1. Determinar una función cuadrática que cumpla con las características enunciadas en cada uno de los siguientes incisos. Cuando sea posible, dar al menos dos posibles soluciones.

   a) Su vértice es $(3, -4)$ y pasa por $(5, 0)$,

   b) Pasa por los puntos de coordenadas $(0, 3)$, $(-1, 2)$, $(1, 0)$,

   c) Tiene un máximo en $(-2, \frac{1}{2})$,

   d) La suma de sus raíces es 5 y el producto de las mismas es 6.

2. Sea $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$.

   a) Indicar el dominio de f,

   b) Hallar los puntos del plano donde el gráfico de f corta a los ejes coordenados,

   c) Expresar a la función en forma canónica e indicar las coordenadas del vértice,

   d) Graficar la función f e indicar el conjunto imagen,

   e) Indicar el valor máximo o mínimo de la función, según corresponda.

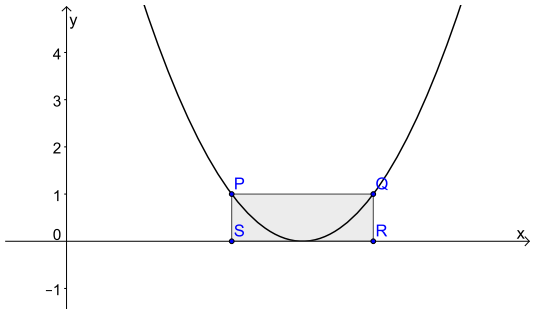
3. Hallar los valores de k que verifiquen que la distancia entre el punto $P = (2, k)$ y $Q = (-3, 4)$ sea $\sqrt{26}$. Determinar la recta que pasa por P y Q en cada uno de los casos hallados.

4. Hallar la ecuación de la parábola indicada en la figura, teniendo en cuenta los siguientes datos

   a) Se desplazó la parábola $y = ax^2$,

   b) La recta $y = 1$ corta a la parábola en $P(\frac{7}{2}, 1)$,

   c) El área del rectángulo PQRS es igual a 3.



5. El largo de una sala rectangular es 3 m mayor que el ancho. Si el ancho aumenta 3 m y el largo aumenta 2 m, el área se duplica. Hallar el área original de la sala.

6. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta en todos los casos.

   a) La parábola $y = ax^2 + c$ tiene como eje de simetría el eje de ordenadas,

   b) Si el coeficiente del término cuadrático es un número negativo, entonces la función alcanza un valor mínimo en la abscisa del vértice,

   c) El desplazamiento de $f(x) = (x + 1)^2 - 2$ respecto de $f(x) = x^2$ es una unidad a la derecha y dos unidades hacia abajo,

   d) El punto $(-1, -3)$ pertence al gráfico de la función $f(x) = 5(x + 1)^2 - 3$.

7. Dada la ecuación de la parábola $g(x) = 2x^2 + 4x + c$, hallar los valores de c para los cuales dicha parábola no posea raíces reales. Comprobar gráficamente para dos valores de c.

Polinomios y función polinómica

1. Al dividir $P(x) = 2x^3 + 4x^2 - 2x + a$ por $Q(x) = x - 3$ se obtuvo resto 10. Hallar el término independiente de $P(x)$.

2. Hallar el valor de a para que se cumpla la siguiente igualdad de polinomios

$$x^7 - 2x^5 = (x^3 + x)[(a - 2)x^4 - 3x^2 + 3] + P(x),$$

   donde $P(x)$ es el resto de dividir $x^7 - 2x^5$ por $x^3 + x$.

3. Dados los siguientes polinomios

$$P(x) = x + 3,$$
$$Q(x) = x^3 - x + 2,$$
$$R(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - x + 6,$$

   indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar las respuestas.

   a) El polinomio $P(x)$ divide al polinomio $Q(x)$.

b) El polinomio $P(x)$ divide al polinomio $R(x)$.

c) El polinomio $Q(x)$ divide al polinomio $R(x)$.

d) El polinomio $P(x)$ divide al polinomio $P(x)$.

e) El polinomio $Q(x)$ divide al polinomio $P(x)$.

4. Dados $P(x) = x^3 + 2mx + m$ y $Q(x) = x^2 + mx - 1$, determinar $m \in \mathbb{R}$ para que $P(x)$ sea divisible por $Q(x)$.

5. a) Hallar todas las raíces del polinomio $P(x) = 9x^6 + 48x^5 + 71x^4 - 6x^3 - 60x^2 - 8x$ sabiendo que -2 es raíz múltiple,

   b) Hallar todas las raíces del polinomio $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 32x$. (Sugerencia: factorizar),

   c) Calcular el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que el polinomio $x^3 - 8x^2 + ax + 50$ tenga a -2 como raíz, y calcular las otras raíces.

6. La función $f(x) = x^3 - 13x^2 + 30x$ representa la trayectoria de un proyectil; donde x (en km) representa la distancia horizontal del proyectil al lugar del lanzamiento y $f(x)$ (en km) representa la altura del proyectil sobre la superficie de la tierra. Calcular a qué distancia impactó en tierra el proyectil.

Trigonometría

1. a) Sabiendo que el perímetro de una circunferencia es 36 cm. Hallar la longitud de un arco de dicha circunferencia correspondiente a un ángulo central de 60º,

   b) Un arco de una circunferencia de 4 cm de radio mi $\frac{8}{5}\pi$ cm. Hallar la medida en el sistema sexagesimal del ángulo central correspondiente a dicho arco.

2. a) Sabiendo que $\cos\alpha = \frac{2}{3}$ y que $\operatorname{tg}\alpha < 0$, calcular $\operatorname{sen}\alpha$,

   b) Sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 3$ y que $\operatorname{sen}\alpha < 0$, calcular $\cos\alpha$. ¿A qué cuadrante pertence el ángulo α?

3. Aplicando herramientas trigonométricas, resolver cada uno de los problemas planteados a continuación.

   a) Una persona, ubicada a 40 m de la base de un edificio de varios pisos, observa la parte superior del mismo elevando sus ojos en un ángulo de 36º52'. Si sabemos que esta persona tiene una altura hasta sus ojos de 1,70 m, ¿qué altura tiene el edificio?

   b) Se sabe que tres ciudades A, B y C están alineadas entre sí, quedando la ciudad C justo en la mitad de las otras dos. En el instante en que un avión vuela a 10000 m de altura justo sobre la ciudad C, el triángulo imaginario formado por el avión y las ciudades A y C tiene un ángulo de 9º27'44" en A. Calcular la distancia que separa al avión de la ciudad B.

   c) Sobre una pared, se han colgado como adorno y orientadas hacia arriba, dos lanzas cruzadas entre sí en un punto. El punto de cruce dista 1 m de los extremos puntiagudos de cada lanza. La separación entre los dos extremos superiores de las lanzas es de 1,40 m. Si cada lanza tiene una longitud total de 3 m, indicar

i) la separación que existe entre los otros dos extremos (inferiores) de las lanzas,

ii) el ángulo que forman entre sí dichas lanzas y que tiene por lados la parte inicial de una de las lanzas y la final de la otra.

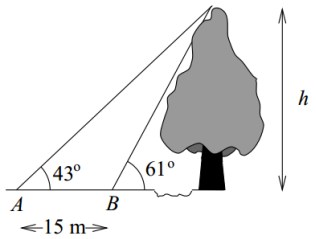
d) Calcular el ángulo agudo que forman las diagonales de un rectángulo cuyos lados miden 8 cm y 12 cm.

e) Dos ángulos opuestos de un romboide miden 20º y 40º. Si los lados correspondientes al ángulo de 40º miden 10 cm, calcular el área del romboide.

f) Un guardabosques desea determinar la altura h de un árbol que se encuentra al otro lado de un río. Para ello mide el ángulo de elevación de la punta del árbol desde el punto A y desde el punto B, a 15 m del punto A, como se indica en la figura. Calcular

i) la distancia del punto B al árbol,

ii) la altura del árbol.



9. Respuestas

9.1. Números Reales

1. a) $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$, b) $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$,
   c) Fraccionarios (exactos), $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, d) $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$,
   e) $\mathbb{I}$ y $\mathbb{R}$, f) Fraccionarios (periódicos), $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$,
   g) Fraccionarios (periódicos), $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$, h) $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.
   i) $\mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$.

2. a) F, pues $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{Q}$. Ejemplo: $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ y $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, b) V, pues $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$,
   c) V, pues $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, d) F, pues $\mathbb{R} \not\subset \mathbb{I}$. Ejemplo: $1 \in \mathbb{R}$ y $1 \notin \mathbb{I}$.

3. a) $-100, -99$ y -98, b) $-17, -16, -15, -14$ y -13, c) $-2, -1, 0, 1$ y 2.

4. a) -3, b) -4, c) -8, d) $-\frac{5}{2}$, e) $\frac{11}{16}$.

5. a) El error es realizar la resta: $2 - 3$, lo correcto es: $2 - 48$. Resultado: 46,
   b) El error es $-2^2 \neq 4$, lo correcto es: $-2^2 = -4$. Resultado: $\frac{15}{34}$.

6. a) $\frac{1}{256}$, b) $\frac{8}{27}$, c) 1, d) $\frac{1}{25}$,
   e) $\sqrt[8]{27}$, f) 125, g) $\frac{1}{3}$, h) $\sqrt[5]{16}$.

7. a) Basta tomar $a = b = c = 1$, resulta $\frac{1}{2} \neq 2$,
   b) Basta tomar $a = 0$, y $b = c = 1$. Sí, es posible, considerando $a = 0$ y $b, c \in \mathbb{R} - \{0\}$ cualesquiera.

9. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$,
   b) $-11 \in \mathbb{Z}^-, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$,
   c) $5 + 2\sqrt{6} \in \mathbb{I}, \mathbb{R}$,
   d) $-\frac{1}{2} \in$ Fraccionarios (exactos),$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$,
   e) $10 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.

11. a) 150 000 m,
   b) i) 205 pavos, ii) 150 gallinas, 143 patos y 140 pavos. Total de animales: 433,
   c) 41 600 l,
   d) 94 perlitas.

12. a) $13ab^3c\,(13a^4+c^4)$, b) $5a^2\,(ab^2-2a^3y+b^3y+3a^4b^5)$,
c) $\dfrac{x^2y^2}{\sqrt{2}}\left(x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{x^2y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^3}\right)$, d) $\pi\,(1+x^2+\pi)$,
e) $\dfrac{m^3n}{2}\left(5m^2n^2-1+\dfrac{p^3}{4}+5m\right)$, f) $\dfrac{xyz}{3}\left(\dfrac{10}{7}+xy^4z^3+\dfrac{2}{3}y^5z^4-2yz^7\right)$.

13. a) $(x+5)^2$, b) $(m+n)^2$, c) $\left(\dfrac{q}{2}-p\right)^2$,
d) No es posible, e) $\left(2x^3+\dfrac{y}{3}\right)^2$, f) $\left(\dfrac{1}{x}-y^4\right)^2$.

14. a) $(x-3)\,(x+3)$, b) $(y-5m)\,(y+5m)$,
c) $(2a-3b^2)\,(2a+3b^2)$, d) $(12m^3-11x^4y^2)\,(12m^3+11x^4y^2)$,
e) $\left(\dfrac{2}{3}a^3-\dfrac{b^2}{5}\right)\left(\dfrac{2}{3}a^3+\dfrac{b^2}{5}\right)$, f) $(x-y-a)\,(x-y+a)$.

15. a) $\dfrac{x-1}{b+1}$, b) $\dfrac{ba}{(b+2a^2)\,(b-2a)}$, c) $\dfrac{a-b}{a+b}$. d) $\dfrac{1}{(m-n)^2}$.

17. b) $-\dfrac{\sqrt{a}}{a+b}$.

18. a) $S=\left\{\dfrac{7}{4}\right\}$, b) $S=\mathbb{R}$, c) $S=\emptyset$. d) $S=\{18\}$.

19. a) -1 es solución; 2 no,
b) -1 es solución; 2 no,
c) -1 no es solución porque anula el denominador.

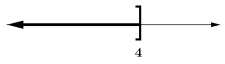
20. a) $S=\{-5,8\}$, b) $S=\{2\}$,
c) $S=\{-5,-1,0,5\}$. d) $S=\{12\}$,
e) $S=\{-9,0\}$. Observar que: $x\geq -9$, f) $S=\{4\}$,
g) $S=\left\{\dfrac{6}{5}\right\}$. Observar que: $x\neq 3,-3$. h) $S=\left\{\dfrac{7}{9}\right\}$. Observar que: $x\neq 2,-2$,
i) $S=\{0\}$. Observar que: $x\neq -1$, j) $S=\emptyset$. Observar que: $x\neq 1,-1$.

21. a) $m=-\dfrac{1}{6}$, b) $m=-\dfrac{9}{8}$, c) $m=\dfrac{68}{7}$.

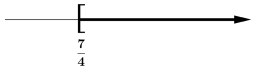
22. a) \$ 12 000 , b) 15,16 y 17, c) 13 años.

23. a) F, b) F, c) V, d) V, e) V.

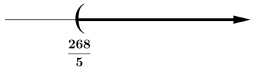
24. a) $(-\infty, 4]$,



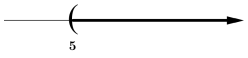
b) $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right)$,



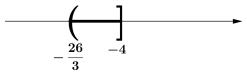
c) $\left(\frac{268}{5}, +\infty\right)$,



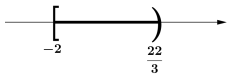
d) $(5, +\infty)$,



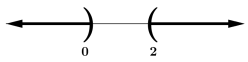
e) $\left(-\frac{26}{3}, -4\right]$,



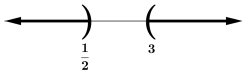
f) $\left[-2, \frac{22}{3}\right)$.



25. a) $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$,

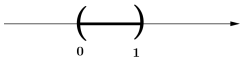


b) $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup (3, +\infty)$.

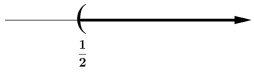


c) $\left[-\frac{1}{2}, 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$,

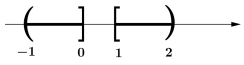
d) $(0, 1)$,



e) $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$,



f) $(-1, 0] \cup [1, 2)$.

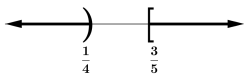


26. a) Ejemplo: $(x-2)(x-5) > 0$,

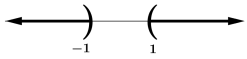
b) Ejemplo: $\dfrac{(x-3)}{x(x-1)} > 0$,

c) Ejemplo: $\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x-1)^2} \leq 0$.

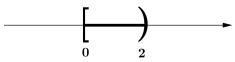
27. a) $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$,



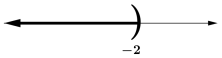
b) $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



c) $[0, 2)$,

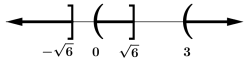


d) $(-\infty, -2)$,



e) $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$,

f) $\left(-\infty, -\sqrt{6}\right] \cup \left(0, \sqrt{6}\right] \cup (3, +\infty)$.



28. a) $x > 23$, b) 100 km, c) 45 y 56, 25.

9.2. Funciones reales de una variable real

1. a) Sí, b) No, c) No.

2. a) No, b) Sí, c) No, d) Sí, e) No, f) Sí.

3. a) i) $f(3) = 2\sqrt{6}$, ii) $f(2) = \sqrt{5}$, iii) $\nexists f(0)$, iv) $f(a+1) = \sqrt{a^3+3a^2+3a-2}$,
   b) i) $g(2) = 7$, ii) $g(-5) = -\frac{105}{19}$, iii) $\nexists g\left(\frac{4}{3}\right)$, iv) $S = \left\{0, \frac{1}{4}\right\}$. Observar que: $x \neq \frac{4}{3}$,
   c) i) $h(1) = 0$, ii) $h(2) = -\frac{1}{2}$, iii) $\nexists h(0)$, iv) $S = \left\{\frac{1}{25}\right\}$. Observar que: $x \neq 0$.

4. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = (-5, 4]$.
   $D(g) = (-4, 4) \cup [5, +\infty)$, $Im(g) = (-5, 4]$.
   $D(h) = (-2, 5]$, $Im(h) = (-5, 4]$,
   b) $f(3) = 4$, $f(-2) = -1$, $\nexists g\left(\frac{9}{2}\right)$, $g(5) = 3$, $h(3) = 0$, $\nexists h(-2)$,
   c)

	f	g	h
$\cap$ eje x	$(5, 0)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$ y $(3, 0)$
$\cap$ eje y	$(0, -1)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$

   d) $[1, 5)$,
   e) $(-4, 0)$.

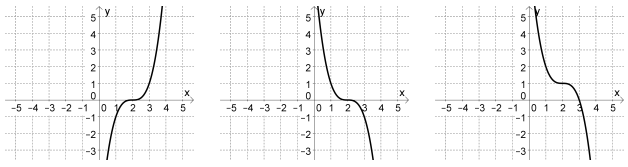
5. a) $f(-3) = -2$, b) $f(0) = 4$, c) $f(2) = -8$, d) $\nexists f(-2)$, e) $f\left(\frac{7}{2}\right) = -11$, f) $S = (-2, 2)$.

6. a) $A(l) = \frac{\sqrt{3}}{4}l^2$. Si $l = 3$, $A = \frac{9}{4}\sqrt{3}$,
   b) $A(d) = \frac{\pi d^2}{4}$,
   c) $A(h) = \frac{h^2}{3}$. $h = 12$, $A = \frac{144}{3}$.

7. a) $D(f) = (-\infty, +\infty)$,
   b) $D(f) = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$,
   c) $D(f) = \mathbb{R}$,
   d) $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, \infty)$,
   e) $D(f) = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$,
   f) $D(f) = [-2, 1) \cup [2, +\infty)$.

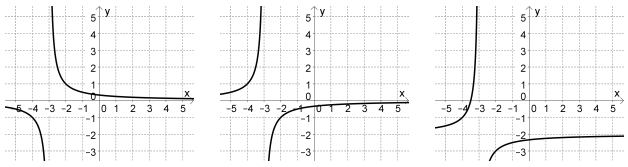
8. a) No. $D(f) = (-\infty, -8) \cup (-8, 1]$, $D(g) = (-\infty, 1]$, b) $\nexists f(-8)$, $g(-8) = \frac{1}{6}$.

9. a) i) desp. horizontal ($\rightarrow$),
   ii) desp. horizontal. ($\rightarrow$) y reflexión eje x ($\curvearrowleft$),
   iii) desp. horizontal ($\rightarrow$), reflexión eje x ($\curvearrowleft$) y desp. vertical ($\uparrow$).



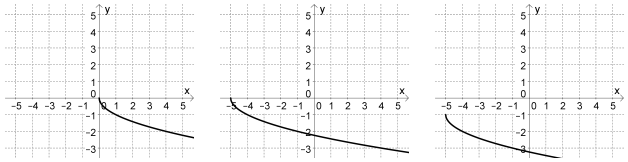
(i) (ii) (iii)

b) i) desp. horizontal ($\leftarrow$),
ii) desp. horizontal ($\leftarrow$) y reflexión eje x ($\curvearrowleft$).
iii) desp. horizontal ($\leftarrow$), reflexión eje x ($\curvearrowleft$) y desp. vertical ($\downarrow$).



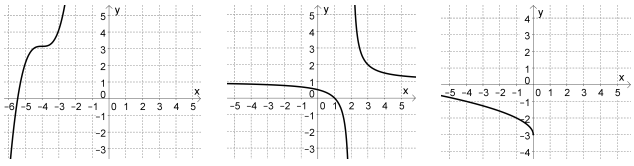
(i) (ii) (iii)

c) i) reflexión eje x ($\curvearrowleft$),
ii) reflexión eje x ($\curvearrowleft$) y desp. horizontal ($\leftarrow$),
iii) reflexión eje x ($\curvearrowleft$), desp. horizontal ($\leftarrow$) y desp. vertical ($\downarrow$).

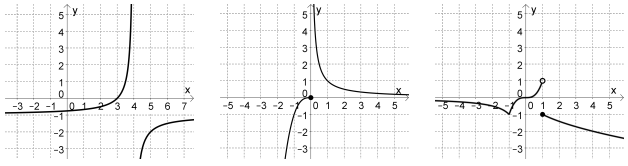


(i) (ii) (iii)

10.



(a) (b) (c)



(d) (e) (f)

11. $g_1(x) = \sqrt{x-1}$, $g_2(x) = -\sqrt{x} + 3$, $g_3(x) = \sqrt{x+1} - 2$.

12. a) $S = \{1\}$, b) $S = \left(\frac{3}{2}, 2\right)$, c) $S = \left(2, \frac{5}{2}\right)$.

13. a) i) $f = f_2 + f_1$, ii) $f = f_2 - f_3$, iii) $f = f_6 \cdot f_4$, iv) $f = f_2 + f_3 \cdot f_5$, v) $f = \frac{f_1}{f_6} - f_4$,
b) i) $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$, ii) $D(f) = (0, +\infty)$, iii) $D(f) = (-\infty, 7]$, iv) $D(f) = (0, +\infty)$, v) $D(f) = (-\infty, 7)$.

14. a) $D(f) = \mathbb{R} - \{-4, 0, 4\}$, b) $D(f) = (0, 4) \cup (4, +\infty)$, c) $D(f) = [0, 1)$.

15.

x	-2	-1	1	2	3	4
$f(g(x))$	3	5	7	3	1	3

$D(f \circ g) = \{-2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

x	-1	0	1	2	3	4
$g(f(x))$	0	4	$\nexists$	0	-1	$\nexists$

$D(g \circ f) = \{-1, 0, 2, 3\}$.

16. a) i) $(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2$,
ii) $(g \circ h)(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x}}$,
iii) $(h \circ f)(x) = x^3 - 2 + \dfrac{1}{x^3-2}$,

b) $(f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^3 - 2$, $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^3-1}$. No son iguales,

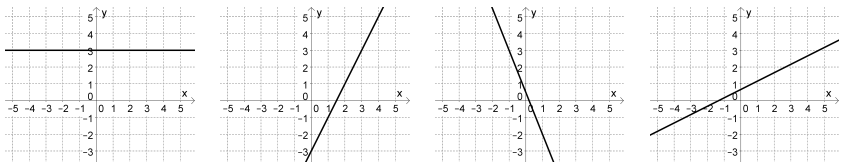
c) i) $(f \circ h)(2) = \frac{109}{8}$, ii) $(h \circ g)(-1)$ no es posible, iii) $(h \circ f)(2) = \frac{37}{6}$, iv) $(g \circ f)(0)$ no es posible.

17. a) Ejemplo: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x+1$, b) Ejemplo: $f(x) = 4x$, $g(x) = x^3+3$,
c) Ejemplo: $f(x) = \sqrt[5]{x}$, $g(x) = x^2-1$, d) Ejemplo: $f(x) = x-1$, $g(x) = \sqrt[5]{x^2}$.

9.3. Función lineal

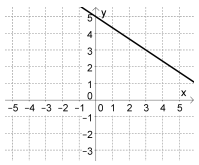
1. a) Si, b) No, c) Si, d) Si, e) No. Observar que es una función lineal a trozos, f) No.

2. a) Pendiente: 3, ordenada al origen: 1,
b) Pendiente: $-\frac{1}{2}$, ordenada al origen: 2,
c) Pendiente: -4, ordenada al origen: 0,
d) Pendiente: 0, ordenada al origen: -1.

3. 
(a) (b) (c) (d)

4. a) f_3, b) f_2, c) f_4, d) f_1.

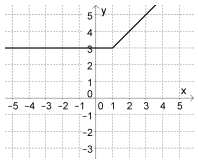
5. a) $Im(f) = \mathbb{R}$, b) Si $a \neq 0$, $Im(f) = \mathbb{R}$. Si $a = 0$, $Im(f) = \{b\}$.

6. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$,

b) $f(6) = 1$, $f(-1) = \frac{17}{3}$, $f(0,75) = \frac{9}{2}$,
c) $a = -37,5$,
d) $S = (-\infty, -6]$.

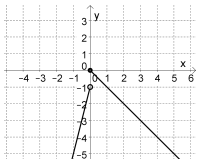
7. a) Opción A: $f(x) = 20 + 2,5x$; Opción B: $f(x) = 30 + 2x$,
b) Opción A: $x = 28$; Opción B: $x = 30$.

8. a) $y = 50x + 100$, b) 850 bacterias, c) 70 horas.

9. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = [3, +\infty)$, b) $D(g) = \mathbb{R}$, $Im(g) = (-\infty, 0]$.



(a)



(b)

10. a) $D(f) = (-\infty, 5]$, $Im(f) = \{-2\} \cup [0, 3]$.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < 1, \\ -x + 3 & \text{si} \quad 1 \leq x < 3, \\ \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

b) $D(g) = [-1, 4)$, $Im(g) = (0, 3]$.

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1, \\ x - 1 & \text{si} \quad 1 < x < 4. \end{cases}$$

11. a) A y C no pertencen a la recta. B pertenece a la recta,

b) $y_A = 3$, $y_B = -3$, $y_C = 0$, $y_D = -\dfrac{12}{5}$.

12. a) $y = 2x - 3$, b) $y = 6x + 13$, c) $y = x + 1$, d) $y = -\dfrac{5}{2}x + 3$,
e) $y = \dfrac{1}{2}x - 2$, f) $y = -3$, g) $x = 4$, h) $y = \dfrac{1}{3}x - \dfrac{8}{3}$,
i) $x = -1$, j) $y = \dfrac{3}{2}x$, k) $y = -\dfrac{1}{4}x - \dfrac{1}{2}$, l) $y = -2\sqrt{2}x + \sqrt{2}$.

13. Los puntos están alineados.

14. $m = -\dfrac{1}{3}$.

15. $y = \dfrac{181}{26}x + 45$. Peso promedio $\approx 288,65$ gr.

16. a) $a = -1$, $b \neq 4$, b) $a = -1$, $b = 4$, c) $a = \frac{4}{9}$, $b \in \mathbb{R}$.

17. a) $k = -\frac{1}{2}$, b) $k = \sqrt{3} - 2$, c) $k = 6$, d) $k \neq -\frac{2}{3}$.

18. a) $d(P, Q) = \sqrt{5}$, b) $d(P', Q') = \dfrac{3}{4}$.

19. Es un triángulo rectangulo en B. Perímetro $= 35,481$ u.m.

9.4. Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

1. a) Compatible determinado. $S = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{6}\right)$,

   b) Compatible determinado. $S = \left(1, \frac{1}{2}\right)$,

   c) Incompatible,

   d) Incompatible,

   e) Incompatible,

   f) Compatible indeterminado. $S = \left\{\left(x, \frac{4}{3} - \frac{2}{3}x\right), x \in \mathbb{R}\right\}$.

2. Sistema compatible indeterminado. $S = \left\{\left(x, \frac{1}{2} + x\right), x \in \mathbb{R}\right\}$.

   Ejemplo de soluciones particulares: $S_1 = \left(0, \frac{1}{2}\right)$ y $S_2 = \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

3. a) $a = -1$, b) $a \neq 1, -1$, c) $a = 1$.

4. a) $k \in \mathbb{R}, k \neq -2$, b) $k = 0$.

5. $P = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

6. $\frac{3}{7}$.

7. 27 y 24.

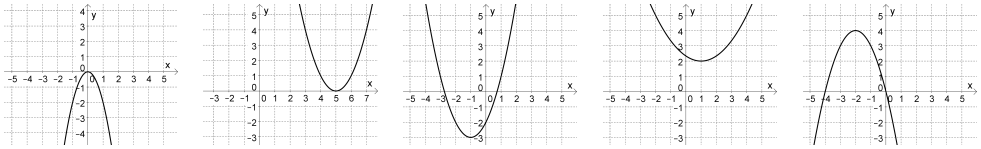
8. Cantidad de ejercicios resueltos bien: 19, cantidad de ejercicios resueltos mal: 9.

9. Precio TV: \$400. Precio DVD: \$300.

10. Área = 100 cm^2.

9.5. Función cuadrática

1. a) cambio de concavidad ($\frown$), b) desp. horizontal ($\rightarrow$), c) desp. horizontal ($\leftarrow$) y desp. vertical ($\downarrow$), d) desp. horizontal ($\rightarrow$) y desp. vertical ($\uparrow$), e) desp. horizontal ($\leftarrow$) , desp. vertical ($\uparrow$) y cambio de concavidad ($\frown$).



(a) (b) (c) (d) (e)

2. $(0, 2)$ y $\left(-2, -\frac{2}{3}\right)$ pertenecen a la parábola, $(3, -6)$ no pertenece a la parábola.

3. a) $k = 0$, b) $k = 8$.

4. a) f_3, b) f_4, c) f_5, d) f_1, e) f_6, f) f_2.

5. a) $y = -\frac{4}{9}(x+2)^2 + 3$, b) $y = (x-1)^2 + 2$, c) $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{3}x + 2$.

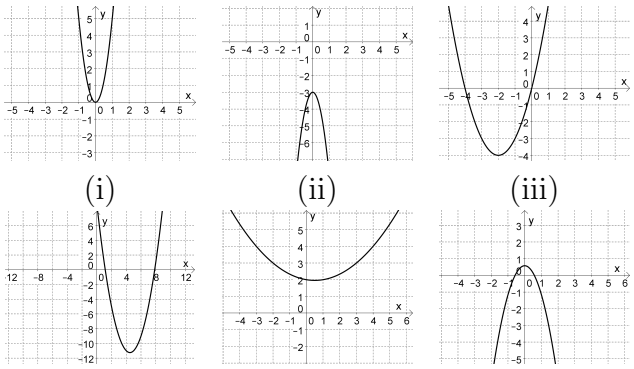
6. a) i) $f(x) = 5(x-0)^2 + 0$, ii) $f(x) = -5(x-0)^2 - 3$, iii) $f(x) = (x+2)^2 - 4$, iv) $f(x) = \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$, v) $f(x) = \frac{1}{6}\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{24}$, vi) $f(x) = -\frac{3}{\sqrt{3}}(x-0)^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}$,

   b) i) $V(0,0)$, ii) $V(0,-3)$, iii) $V(-2,-4)$, iv) $V\left(\frac{9}{2}, -\frac{45}{4}\right)$, v) $V\left(\frac{1}{2}, \frac{47}{34}\right)$, vi) $V\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$,

   c) i) $Im(f) = [0, +\infty)$, ii) $Im(f) = (-\infty, -3]$, iii) $Im(f) = [-4, +\infty)$, iv) $Im(f) = \left[-\frac{45}{4}, +\infty\right)$, v) $Im(f) = \left[\frac{47}{24}, +\infty\right)$, vi) $Im(f) = \left(-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$,

   d) i) $P_1(0,0)$, ii) $P_2(0,-3)$, iii) $P_3(0,0)$, iv) $P_4(0,9)$, v) $P_5(0,2)$, vi) $P_6(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$.

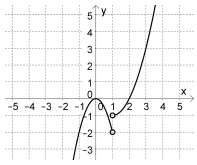
   e)



(i) (ii) (iii)

(iv) (v) (vi)

7. a)



   b) $D(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$, $Im(f) = (-\infty, +\infty)$.

   c) $f(-1) = -2$, $\nexists f(1)$, $f(2) = 0$.

8. $y = f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} & \text{si} \quad x \leq 1, \\ -2(x-3)^2 + 1 & \text{si} \quad x > 1. \end{cases}$

9. a) $x = 3$ y $x = -3$, b) $x = 0$ y $x = \frac{2}{5}$, c) $x = -1$ y $x = -5$, d) $S = \emptyset$, e) $x = 1$ y $x = -\frac{4}{3}$, f) $x = \frac{1}{2}$ y $x = -4$.

10.

   a) $x = -\frac{2}{3}$. Observar que: $x \neq 3$,

   b) $x = \frac{1}{6}$ y $x = -2$,

   c) $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$,

   d) $S = \emptyset$. Observar que: $x \neq 2$ y $x \neq -3$,

   e) $x = 2$ y $x = -2$,

   f) $S = \emptyset$,

   g) $x = 1$, $x = -1$, $x = 2$ y $x = -2$,

   h) $x = 4$, $x = 2$ y $x = -2$,

   i) $x = 0$ y $x = 4$,

   j) $x = 1$ y $x = 3$.

11. a) i) Hay 2 intersecciones con el eje x, pues $\Delta > 0$. ii) Hay 1 intersección con el eje x, pues $\Delta = 0$. iii) No hay intersecciones con el eje x, pues $\Delta < 0$. iv) Hay 2 intersecciones con el eje x, pues $\Delta > 0$.

    b) i) $y = (x-5)(x+4)$, ii) $y = 3(x-7)^2$, iii) No es posible, iv) $y = \frac{1}{3}\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)$.

12. a) $y = -\frac{3}{16}x(x-8)$, b) $y = (x-2)(x-5)$.

13. a) $m \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)$, b) $m \in \left(-\infty,-\frac{1}{8}\right)$. c) $m = \pm 2\sqrt{5}$.

14. a) $y = \frac{4}{3}(x-2)(x-3)$, b) $y = -\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$, c) $y = -12(x+1)(x+2)$, d) $y = \frac{5}{9}(x-1)^2 - 5$.

15. $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

16. a) 97 y 98, b) 2, c) -1. Observar que: $\frac{19}{5} \notin \mathbb{Z}$, d) 13 m, e) Un lado mide 7 cm. y el otro 3 cm, f) Base = 10 cm., base = 7 cm. y altura = 4 cm..

9.6. Polinomios y función polinómica

1. a) Sí, b) Sí, c) No,
   d) Sí, e) No, f) Sí,
   g) No, h) No, i) Sí.

2.

Polinomio	Grado	Coef. ppal.	Término indep.	Forma completa decreciente
$P(x) = 3+5x^5+6x^3$	5	5	3	$5x^5+0x^4+6x^3+0x^2+0x+3$
$P(x) = 2-x$	1	-1	2	$-x+2$
$P(x) = 0$	No tiene	No tiene	0	0
$P(x) = x^4+x^7+9x$	7	1	0	$x^7+0x^6+0x^5+x^4+0x^3+0x^2+9x+0$
$P(x) = x^2+1+4x^2$	2	5	1	$5x^2+0x+1$
$P(x) = 3x^6$	6	3	0	$3x^6+0x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+0$

3. a) $a = 0$, $b = 5$, $c = -1$. b) $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$.

4. $a = 2$, $b = 1$.

5. a) $P(2) = -1$, $P(-1) = -4$,
   b) $Q(2) = -4$, $Q(-1) = 2$,
   c) $R(2) = -28$, $R(-1) = -1$.

6. a) $m = 2$, b) $m = -\frac{4}{3}$, c) $m = 10$.

7. a) $P(x) - Q(x) = x^5 + 2x^4 - 8x^2 + 2x$ (grado 5),
   b) $P(x) - 3Q(x) + 5x^2 = x^5 - 6x^4 + 17x^2 + 2x$ (grado 5),
   c) $-3 \cdot R(x) - P(x) = -12x^6 - x^5 + 9x^4 - 3x^3 + 24x^2 + 7x$ (grado 6),
   d) $P(x) \cdot Q(x) = -2x^9 + 5x^7 + 6x^6 - 4x^5 - 15x^4 + 10x^3$ (grado 9),
   e) $Q(x)^2 = 4x^8 - 20x^6 + 25x^4$ (grado 8),

f) $Q(x)^2 - x \cdot P(x) + R(x) = 4x^8 - 15x^6 + 22x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 3x$ (grado 8).

8. a) cociente: $x+4$, resto: $3x^2 - 6x + 12$.
$P(x) = x^4 + 3x^3 - 3x + 8 = (x^3 - x^2 + x - 1)(x+4) + (3x^2 - 6x + 12)$,

b) cociente: $6x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4$, resto: 4. (Por R.Ruffini).
$P(x) = 6x^7 - 2x^6 - x^4 + x = (x-1)(6x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 3x^2 + 3x + 4) + (-2)$,

c) cociente: $-2x^3 + 6x^2 - 21x + 63$, resto: -189. (Por R.Ruffini).
$P(x) = -2x^4 - 3x^2 = (x+3)(-2x^3 + 6x^2 - 21x + 63) + (-189)$,

d) cociente: $3x^3 - 4x^2 + 16x - 32$, resto: $101x - 130$.
$P(x) = 3x^5 - x^4 + 5x - 1 = (x^2 + x - 4)(3x^3 - 4x^2 + 16x - 32) + (101x - 130)$.

9. $P(x) = Q(x) \cdot C(x) + R(x) = x^7 - 3x^6 - x^5 + 3x^4 + x^3 + 3x^2$.

10. a) -2 y $\frac{1}{3}$ son raíces de $P(x)$, -1 no es raíz de $P(x)$,
b) $-\frac{1}{2}$ es raíz de $P(x)$, 2 y -1 no son raíces de $P(x)$.

11. a) $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, pues $P(2) = 0$,
b) $P(x)$ no es divisible por $Q(x)$, pues $P(-1) = -36$,
c) $P(x)$ es divisible por $Q(x)$, pues $P(3) = 0$,
d) $P(x)$ no es divisible por $Q(x)$, pues $P\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$.

12. a) $k = -\frac{5}{2}$, b) $k = 1$.

13. a) $m = -13$, b) $x = 9$, c) $a = -2$ ó $a = -3$.

14. a) $x = -1$. Orden de multiplicidad: 1.,
$x = 0$. Orden de multiplicidad: 2,

b) $x = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{\sqrt{17}}{4}$. Orden de multiplicidad: 1,
$x = -\dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{17}}{4}$. Orden de multiplicidad: 1,
$x = \dfrac{1}{2}$. Orden de multiplicidad: 2,

c) $x = 0$. Orden de multiplicidad: 1,
$x = 1$. Orden de multiplicidad: 3.

15. a) $P(x) = a\ x\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right)(x+1)^2$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,
b) $P(x) = a\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 (x-4)^2$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,
c) $P(x) = a\ (x-2)(x+3)(x^2+4)$, $a \in \mathbb{R} - \{0\}$,
d) $P(x) = -3\ x\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$.

16. $P(x) = a(x-2)(x-3)(x^2-1) = a(x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6)$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$. No es único pues $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

17. a) $a = -1$ y $a = -3$, b) $a = -3$.

18. a) $f(x) = -x^4 + 2x^3 + 25x^2 - 26x - 120$,
    b) i) F, ii) V, iii) F, iv) V.

19. Sí, esto sucede en la primer y séptima semana.

20. a) 65°C,
    b) A las 18 hs. $(10 + 8 = 18)$ y a las 2 hs. del día siguiente $(18 + 8 = 26)$
    Observar que las mediciones son a partir de 8 hs,
    c) Entre las 18 hs. y las 2 hs. del día siguiente.

21. a) El globo estará a 12 m. sobre el nivel del mar, b) Sí, a los 10 días de viaje.

22. Arista C: $C(x) = 8x + 7$.

9.7. Trigonometría

1. a) 72°, b) 143°14′20″, c) 114°35′30″.

2. a) 3 rad, b) 0,6225 rad, c) 1,22 rad.

3.

M.Sexag.	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	240°	270°	300°	360°
M. Radial	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π

4. a) 7,2 m, b) 4,5 m.

5. $\frac{5}{3}\pi$ cm.

6. $0,\widehat{45}$ rad.

7.

Cuadrante	I	II	III	IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-

8. a) $\text{sen}(150°) = \text{sen}(30°) = 1/2$, b) $\cos(-300°) = \cos(60°) = 1/2$,
   c) $\text{tg}(\frac{7}{6}\pi) = \text{tg}(\pi/6) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, d) $\text{sen}(-\frac{5}{4}\pi) = \text{sen}(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
   e) $\cos(540°) = -\cos(0°) = -1$, f) $\text{tg}(-\frac{2}{3}\pi) = \text{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$,
   g) $\cos(\frac{19}{4}\pi) = -\cos(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, h) $\text{sen}(450°) = \text{sen}(90°) = 1$.

9. a) $\alpha \in$ II cuadrante, b) $\alpha \in$ I cuadrante, c) $\alpha \in$ IV cuadrante.

10. a) $\cos(\alpha) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$ y $\text{tg}(\alpha) = -\frac{1}{4\sqrt{5}}$,
    b) $\text{sen}(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{3}$ y $\text{tg}(\beta) = \frac{\sqrt{5}}{2}$,
    c) $\cos(\gamma) = -\frac{\sqrt{6}}{6}$ y $\sin(\gamma) = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

11. a) $S = \left\{\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$. b) $S = \left\{\frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$. c) $S = \left\{\frac{3}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi\right\}$.
d) $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi\right\}$. e) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$. f) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$.
g) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$. h) $S = \left\{0, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right\}$. i) $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\right\}$.

12.

θ	$\hat{A}$	$\hat{C}$	$A\hat{B}D$	$C\hat{B}D$
$\operatorname{sen}\theta$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$\cos\theta$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$\operatorname{tg}\theta$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$

13. a) $\hat{B} = 90°$, $\hat{C} = 48°$, $a \approx 4,6839$ cm. y $c \approx 5,2020$ cm,
b) $\hat{A} = 56°23'25{,}53''$, $\hat{B} = 90°$ y $= 33°36'34{,}47''$. $a = 36,5611$ cm,
c) $a = 8,5454$ cm., $b = 4,9014$cm., $\hat{A} = 35°$ y $\hat{B} = 90°$.

14. Altura $\approx$ 20,0751 m.

15. $\alpha = 21°48'5{,}07''$ (ángulo de inclinación mínima).

16. $r \approx$ 10,143 cm.

17. Altura $\approx$ 2,9991 m.

18. a) $h =$ 18,37 u.m. , b) La longitud de $\overline{AC} =$ 41,07 u.m. y de $\overline{BC} =$ 32,85 u.m,
c) Área = 377,24 u.m^2, d) Perímetro = 96,92 u.m.

19. 32,84 m.

20. 112,64 m.

21. a) Longitud = 65 m, b) Profundidad = 35,48 m.

22. La longitud de: $\overline{AB} =$ 51,96 u.m, $\overline{BD}$ =25,98 u.m. y $\overline{AD}$ =45 u.m.

9.8. Ejercicios adicionales

Números Reales

1. $x^2 + 2x$.

2. a) $a \notin C$, $b \in C$,
   b) $a \notin C$, $b \notin C$,
   c) $a \in C$, $b \notin C$.

4. a) $\dfrac{3x-2}{3(3x-1)}$, b) 2,
   c) $\dfrac{x}{x-2}$, d) $\dfrac{1}{2pq-5}$,
   e) $\dfrac{1}{x^2-1}$, f) $\dfrac{a-b}{a^2-ab-b^2}$.

5. a) 12,5 %,
   b) 20 %,
   c) 5 cuadernos.

6. a) 41 artículos,
   b) -2 y -3.

Funciones reales de una variable real

1. $c = 5$.

2. a) F,
   b) V,
   c) V.

3. a) \$1500, \$3750,
   b) $f(x) = \begin{cases} 150(65-x) & \text{si } 0 \leq x < 65, \\ 0 & \text{si } 65 \leq x \leq 130, \\ 150(x-130) & \text{si } x > 130. \end{cases}$

4.

	a)	b)
Valores positivos	$(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$	$(-\infty,-3) \cup (-1,0) \cup (0,3)$
Valores negativos	$(-1,1)$	$(-3,-1) \cup (3,+\infty)$
Valor nulo	$\{1,-1\}$	$\{3,-3\}$

5. a) $(-\infty,-2] \cup [-\frac{1}{2},\frac{1}{3})$,
   b) $(-\infty,-\frac{3}{2}] \cup (-\frac{1}{3},+\infty)$.

Función lineal

1. a) $D(f) = \mathbb{R}$, $Im(f) = \mathbb{R}$,
   b) $f(\sqrt{2}) = 3$, $f(-1) = \sqrt{2} + 5$,
   c) $a = 0$,
   d) $(-\infty, -\sqrt{2}]$.

2. a) $m = -24$, $n = -1$,
   b) $m = \frac{3}{8}$, $n = -1$.

3. a) i) Contiene al lado $\overline{AB}$: $y = 2x$,
      Contiene al lado $\overline{AD}$: $y = x + 1$.
      ii) 6 u.m.^{2}.
   b) i) $f(x) = 16x + 10$,
      ii) Interpretación de la pendiente: por cada litro de lavandina que compre deberá abonar \$16.
      Interpretación de la ordenada al origen: tiene un costo incial de \$10 en concepto de envase,
      iii) \$66,
      iv) 2 litros.

4. a) F. La pendiente es $\frac{1}{2}$ y la ordenada al origen es $\frac{3}{4}$,
   b) V. Tienen la misma pendiente,
   c) F. Su gráfico intersecta al eje x en $x = -\frac{3}{2}$,
   d) F. Las coordenadas del punto no satisfacen la ecuación de la recta,
   e) F. Una tiene pendiente $\frac{1}{2}$ y la otra tiene pendiente $-\frac{1}{2}$, diferente de $-\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$.

Sistemas de cuaciones lineales con dos incógnitas

1. a) Compatible determinado. $S = \{(6, 3)\}$,
   b) Compatible indeterminado. $S = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$,
   c) Incompatible. $S = \emptyset$.

2. Compatible determinado para $k \neq 7$,
   Compatible indeterminado para $k = 7$,
   Nunca es incompatible.

3. \$36 y \$52.

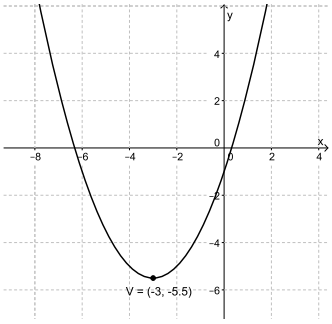
4. $-4x + 6y = -4$.

5. a) V, b) F, c) V, d) V, e) F.

Función cuadrática

1. a) $f(x) = (x-3)^2 - 4$,
   b) $f(x) = -2x^2 - x + 3$,
   c) $f(x) = a(x+2)^2 + \frac{1}{2}$, con $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$,
   d) $f(x) = a(x-3)(x-2)$, con $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

2. a) $D(f) = \mathbb{R}$,
   b) Intersección con el eje x: $(-3+\sqrt{11}, 0)$ y $(-3-\sqrt{11}, 0)$,
   Intersección con el eje y: $(0, -1)$.
   c) $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - \frac{11}{2}$. Coordenadas del vértice: $(-3, -\frac{11}{2})$,
   d)



   $Im(f) = [-\frac{11}{2}, +\infty)$.
   e) El valor mínimo es $-\frac{11}{2}$ y se alcanza en $x = -3$.

3. $k = 3$ o $k = 5$. Las rectas correspondientes son $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$ e $y = \frac{1}{5}x + \frac{23}{5}$.

4. $y = \frac{4}{9}(x-5)^2$.

5. 40 m^2.

6. a) V, b) F, c) F, d) V.

7. $c \in (2, +\infty)$.

Polinomios y funciones polinómicas

1. $a = -74$.

2. $a = 3$.

3. a) F, b) V, c) V, d) V, e) F.

4. $m = -1$.

5. a) -2 (triple), 0 (simple), $\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{2}}{3}$ (simple) y $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$ (simple).
   b) 0, -2, 4 y -4 (todas simples).
   c) $a = 5$. Las raíces son -2 (simple) y 5 (doble).

6. 3 km.

Trigonometría

1. a) 6 cm, 72^o.

2. a) $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{\sqrt{6}}{3}$,
   b) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$. α pertenece al tercer cuadrante.

3. a) 31,70 m, b) 60 828,26 m, c) i) 2,8 m, ii) $91^o8'46"$,
   d) $67^o22'48"$, e) 98,46 cm^2, f) i) 16,05 m, ii) 28,95 m.